



Marta Louro da Costa Osório

Licenciada em Ciências de Engenharia Civil

Estudo da Resistência Plástica de Perfis de Aço com Secção em C

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Civil – Perfil de Estruturas

Orientador: Professor Doutor Rodrigo Moura Gonçalves

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Corneliu Cismasiu

Arguente: Prof. Doutor João Rocha de Almeida

Vogal: Prof. Doutor Rodrigo Moura Gonçalves



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho 2014

“Copyright” Marta Louro da Costa Osório, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Deixo aqui os meus mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram na realização desta Dissertação.

Ao meu orientador, Professor Rodrigo Gonçalves, um agradecimento especial pelo apoio prestado, pela total disponibilidade e dedicação e sobretudo, pela sua competência e transmissão de conhecimentos.

À minha família, especialmente aos meus pais, um enorme e eterno agradecimento pela motivação e apoio incondicionais na conclusão desta etapa da minha vida.

Por fim, mas não menos importante, aos meus amigos que, perto ou longe, permaneceram presentes nos bons e maus momentos contribuindo positivamente para o meu desenvolvimento pessoal.

Marta Osório

Resumo

Na presente dissertação estuda-se a resistência plástica de secções de aço em C sujeitas a (i) flexão composta desviada e (ii) a torção com empenamento restringido. Em particular, contribui-se no sentido de colmatar a lacuna existente no Eurocódigo 3 (CEN, 2005) relativa à verificação de segurança de secções em C, de classe 1 e 2.

No caso da resistência à flexão composta desviada, desenvolve-se e valida-se um programa em MATLAB (The Mathworks Inc., 2011) que permite obter as curvas de interação para secções em C de dimensões arbitrárias. Com este programa, estuda-se a (i) influência da geometria da secção na forma das curvas de interação e (ii) obtêm-se ábacos para a determinação da resistência, os quais cobrem toda a gama de perfis comerciais com secção em C, de classe 1 e 2.

Finalmente, estuda-se a resistência plástica de vigas em consola sujeitas à torção pura e efetua-se um estudo paramétrico. Neste estudo investiga-se a precisão do método analítico desenvolvido por Trahair and Pi (1997), através de comparações com resultados obtidos com modelos de elementos finitos de casca, analisados no programa ADINA (Adina R & D, Inc., 2013). Conclui-se que o método analítico traduz uma boa aproximação das cargas de colapso.

Palavras chave:

perfis de aço; secções em C; flexão composta desviada; torção; empenamento; resistência plástica.

Abstract

On the Plastic Resistance of Steel Channel Sections

The present work focuses on the plastic resistance of channel sections subjected to (i) biaxial bending with axial force and (ii) torsion with restrained warping. In particular, this work contributes to fill the existing gap in Eurocode 3 (CEN, 2005) concerning the safety checking of channel sections of class 1 and 2.

For biaxial bending with axial force, a MATLAB (The Mathworks Inc., 2011) program is developed and validated, which calculates the interaction curves for channel sections of arbitrary dimensions. The resulting program is employed to (i) analyse the influence of the cross-section geometry in the shape of the interaction curves and to (ii) obtain charts that allow for an easy determination of the cross-section resistance, for the complete range of commercial channel section profiles of class 1 and 2.

Finally, the plastic resistance of cantilevers subjected to pure torsion is analysed and a parametric study is conducted. In this study, the accuracy of the analytical method developed by Trahair and Pi (1997) is investigated, through comparison with results obtained with shell finite element models analysed with ADINA (Adina R & D, Inc., 2013). It is concluded that the analytical method leads to very good results.

Keywords:

steel members; channel sections; biaxial bending with axial force; torsion; warping; plastic resistance.

Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Organização da Dissertação	3
2 Resistência à flexão composta desviada	5
2.1 Introdução	5
2.2 Metodologia	6
2.2.1 Descrição do programa em MATLAB	8
2.2.1.1 <i>coordcalc.m</i>	8
2.2.1.2 <i>esfplastic.m</i>	11
2.2.1.3 <i>lneutra.m</i>	13
2.2.1.4 <i>esforcos.m</i>	15
2.2.1.5 <i>run.m</i>	17
2.3 Resultados	19
2.3.1 Validação	19
2.3.2 Comparação com o Eurocódigo 3	27
2.3.3 Comparação com a fórmula de Kitipornchai <i>et al.</i> (1991)	28
2.3.4 Estudo paramétrico	29
3 Resistência à torção	39
3.1 Introdução	39
3.2 Cálculo analítico de T_{pl}	41

Índice de Matérias

3.2.1	Momento tursor plástico para torção uniforme	42
3.2.2	Momento tursor plástico para torção não-uniforme	42
3.3	Estudo paramétrico	45
3.3.1	Cálculo com elementos finitos de casca	45
3.3.2	Comparação de resultados	46
4	Conclusões e desenvolvimentos futuros	51
4.1	Conclusões	51
4.2	Desenvolvimentos futuros	52
	Bibliografia	53
A	Ábacos para a flexão composta desviada	55
A.1	Tabela de perfis comerciais UPN e UPE e respectivos parâmetros geométricos	55
A.2	Ábacos para a determinação de resistência à flexão composta desviada	57

Índice de Figuras

2.1	Comportamento elástico-perfeitamente plástico.	6
2.2	a) Discretização da secção; b) posição arbitrária da LN e sinal das tensões.	7
2.3	a) Malha de discretização da secção; b) secção em C e respectivas dimensões.	9
2.4	1º e 2º caso da posição da LN vertical, respetivamente a) e b).	12
2.5	Determinação do sinal da tensão de cada área parcelar.	14
2.7	Parâmetros geométricos de uma secção em C.	19
2.6	Fluxograma do procedimento de cálculo.	20
2.8	Curvas de interação obtidas com o programa em MATLAB (a cores) e os obtidos por Chen e Atsuta (1977)(a negro).	21
2.9	Curva de interação - secção C10x20	22
2.10	Relação de simetria das secções com as respetivas curvas de interação. (Fonte: Chen e Atsuta, 1977).	23
2.11	Curvas de interação da secção C10x20 à compressão (linhas a tracejado) e à tração (linhas contínuas).	24
2.12	Curvas de interação da secção C 10x20 no plano $n-m_z$	25
2.13	Curva de interação de esforço axial e momento fletor numa secção em T (Hang, 2002).	25
2.14	Geometria de uma secção em T e representação da posição LN assumida nos cálculos.	26
2.15	Relação do momento resistente máximo normalizado com o parâmetro b (esbelteza da secção).	26
2.16	Relação do momento resistente máximo normalizado com os parâmetros b (esbelteza da secção) e c (esbelteza da alma).	26
2.17	Comparação entre as curvas de interação da secção C10x20 obtidas segundo o EC3 (traço interrompido) e o programa em MATLAB (traço contínuo).	28
2.18	Curvas de interação (exatas e aproximadas) obtidas por Kitipornchai <i>et al.</i> (1991).	29
2.19	Valores de α , β e γ para os perfis UPN e UPE.	31
2.20	Diagramas de interação correspondentes aos quatro vértices inferiores do paralelepípedo, $\gamma = 4, 71$	32
2.21	Diagramas de interação correspondentes aos quatro vértices superiores do paralelepípedo, $\gamma = 6, 875$	33

Índice de Figuras

2.22	Subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.	34
2.23	Diagramas de interação de pontos gerados após a subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.	35
2.24	Diagramas de interação de pontos gerados após a subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.	36
2.25	Diagramas de interação de pontos gerados após a subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.	37
3.1	Torção não-uniforme de uma secção em I (Fonte: Naraynan, S. <i>et al.</i> , sd.).	40
3.2	Contribuição da torção uniforme no momento torsor ao longo do eixo longitudinal de uma viga em consola (Gonçalves, 2014).	41
3.3	Divisão da secção em C em retângulos para determinação de $T_{pl,SV}$	43
3.4	Esforços nas paredes de uma secção em C sujeita à torção não-uniforme (Oden, 1981).	43
3.5	Decomposição dos esforços plásticos nos banzos.	44
3.6	Esforços nas paredes de uma viga em consola com secção em C e diagrama de corpo livre das mesmas.	45
3.7	Modelo de elementos finitos de casca.	46
3.8	Torção plástica num perfil UPN 100, em consola.	48
3.9	Torção plástica num perfil UPN 50, em consola.	48
3.10	Torção plástica num perfil UPE 200, em consola.	49
A.1	Dimensões de uma secção em C.	55
A.2	$\alpha = 1,09$ e $\beta = 7,2$	58
A.3	$\alpha = 1,09$ e $\beta = 19,8$	59
A.4	$\alpha = 1,09$ e $\beta = 32,4$	60
A.5	$\alpha = 3,93$ e $\beta = 7,2$	61
A.6	$\alpha = 2,5$ e $\beta = 19,8$	62
A.7	$\alpha = 2,5$ e $\beta = 32,4$	63
A.8	$\alpha = 2,5$ e $\beta = 7,2$	64
A.9	$\alpha = 3,93$ e $\beta = 19,8$	65
A.10	$\alpha = 3,93$ e $\beta = 32,4$	66

Índice de Tabelas

2.1	Dimensões da secção em C10x20.	19
2.2	Valores extremos dos parâmetros geométricos.	30
2.3	Valores dos parâmetros geométricos após subdivisões.	30
3.1	Valores de momento torsor plástico para torção uniforme das diferentes secções em C.	46
3.2	Valores de momento torsor para torção não-uniforme das diferentes secções em C.	46
3.3	Valores da carga de colapso das diferentes secções em C, obtidas pelo <i>software</i> ADINA.	47
A.1	Tabela de perfis comerciais UPN e UPE e respectivos parâmetros geométricos, adaptado das tabelas de perfis de ArcelorMittal.	56
A.2	Parâmetros geométricos.	57

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas

EC3 Eurocódigo 3

LN Linha Neutra

Índices

()_{Ed} valor de cálculo do esforço atuante

()_f relativo ao banzo (*flange*)

()_{pl} valor plástico

()_{Rd} valor de cálculo do esforço resistente

()_w relativo à alma (*web*)

()_{wp} relativo ao empenamento (*warping*)

()_x relativo ao eixo x

()_y relativo ao eixo y

()_z relativo ao eixo z

Letras Latinas Maiúsculas

A área da secção transversal

E módulo de elasticidade

G módulo de distorção

H altura da secção

H^* altura da alma

I momento de inércia

L comprimento da barra

M momento fletor

N esforço axial

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

T momento torsor

V esforço transversal

Letras Latinas Minúsculas

b largura (do banzo) da secção

b^* largura (do banzo) da secção descontando a espessura da alma

l espaçamento da malha de discretização da secção transversal

m momento fletor normalizado ($m = \frac{M}{M_{pl}}$)

n esforço axial normalizado ($n = \frac{N}{N_{pl}}$)

t espessura

Letras Gregas

α esbelteza da secção transversal ($\alpha = \frac{H^*}{b^*}$)

β esbelteza da alma ($\beta = \frac{H^*}{t_w}$)

γ esbelteza dos banzos ($\gamma = \frac{b^*}{t_f}$)

Γ constante de empenamento

ν coeficiente de Poisson

σ_y tensão de cedência

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Os Eurocódigos Estruturais consistem num conjunto de normas europeias para o projeto de estruturas. Têm como objetivo a remoção de potenciais entraves técnicos ao comércio e a harmonização das especificações técnicas, através da conformidade de requisitos de resistência, estabilidade e segurança estabelecidos na União Europeia (CEN, 2005).

São dez as normas europeias que, numeradas de 0 a 9, constituem os eurocódigos estruturais. Cada norma consiste numa abordagem de um tema específico no âmbito do projeto estrutural. O Eurocódigo 3 (CEN, 2005) contém regras específicas de projeto de estruturas de aço.

A parte 1-1 do EC3 trata regras gerais e regras a adotar no projeto de edifícios. As restantes partes constituintes do EC3 abordam situações particulares, nomeadamente a utilização de determinados materiais, verificações de segurança em situações particulares e verificação da resistência ao fogo (CEN, 2005).

O aço apresenta-se em elementos construtivos num vasto catálogo de formatos e dimensões. Os perfis normalizados, que consistem em soluções *standard*, podem ser classificados através da geometria da sua secção transversal. Alguns exemplos são as secções em I, L (cantoneira), H, T, Z e C (*channel*) — estas últimas são conhecidas em Portugal e na Europa como secções em U.

Os tipos de perfis mais comuns são em I e H. O EC3 incide principalmente neste tipo de secções, fornecendo adaptações das regras mencionadas para secções de outros tipos, nomeadamente, em C, que são também bastante utilizados na construção civil.

Após uma pesquisa bibliográfica relacionada com a determinação da resistência e verificação de segurança de secções em C, concluiu-se que se trata de um tema muito pouco abordado.

Chen e Atsuta (1977), estudando a resistência à flexão composta desviada de secções de variados tipos, apresentaram métodos de análise para a determinação da resistência de secções. Os autores incidiram o estudo no comportamento de secções duplamente simétricas (tubulares retangulares/circulares, e em I), como também de secções mono-simétricas e assimétricas (C, T e L).

Como resultado obtiveram curvas de interação de momentos em duas direções para um determinado nível de esforço axial para os tipos de secções mencionados. No caso de secções em C, os autores calcularam curvas de interação para uma secção C10x20 (perfis comerciais americanos).

Kitipornchai *et al.* (1991) publicaram um artigo onde apresentam equações de interação que traduzem uma boa aproximação das curvas de interação de secções em C, T e L desenvolvidas por Chen e Atsuta.

Assim, Kitipornchai *et al.* obtiveram equações que podem servir como auxílio no dimensionamento de secções em C. Porém, tratam-se de equações bastante complexas de difícil utilização como ferramenta ágil para o dimensionamento e verificação de segurança. Adiante nesta Dissertação, será demonstrado que estas equações conduzem a erros apreciáveis quando aplicadas a secções em C com dimensões de catálogo, porque apenas traduzem eficientemente as curvas de interação de secções C 10x20.

Relativamente aos efeitos de encurvadura lateral, o EC3 fornece uma regra para verificação de segurança de secções em I. Para as restantes secções transversais o EC3 recomenda a curva de encurvadura mais conservativa. Snijder *et al.* (2008) estudaram cinco métodos de dimensionamento de secções em C quando sujeitas a efeitos de encurvadura lateral provocada por um carregamento excêntrico na alma. Estas regras, que foram verificadas através de uma análise por elementos finitos, conduziram a uma regra de dimensionamento e verificação de segurança que se aproxima da proposta pelo EC3.

O dimensionamento de elementos estruturais de aço considerando a torção é também um tema muito pouco desenvolvido. Isto deve-se a uma ideia geral de que este efeito tem rara ocorrência e que, quando sucede, é de menor importância. Devido ao desenvolvimento da tecnologia e, por conseguinte, da engenharia computacional, surgiu uma crescente utilização de programas de análise tridimensional, o que facilitou o estudo e a percepção dos efeitos da torção numa estrutura (Trahair e Pi, 1997).

S. Baba e Kajita (1982) desenvolveram uma formulação de elementos finitos para a análise de vigas sujeitas à torção. Neste trabalho, a rigidez de torção é avaliada pela função de empenamento da secção, que por sua vez é determinada numericamente através da geometria da secção, da progressão da região plástica e do efeito dos deslocamentos. Foram estudadas vigas com secções retangulares e em I e concluíram que, num problema de torção elasto-plástica, a formulação desenvolvida devolve bons resultados.

Bathe e Wiener (1983) estudaram vários modelos de elementos finitos para representar um perfil de aço com secção em I com o fim de analisar a resposta elasto-plástica da torção incluindo o empenamento. Concluíram que os modelos desenvolvidos são apropriados para vigas em I. Para as secções C, T e L, sugeriram a aplicação destes modelos a fim de testar a sua aplicabilidade.

Trahair e Pi (1997) desenvolveram um procedimento simples rígido-plástico para a determinação do colapso por torção de vigas de secção em I. Neste artigo, as resistências de colapso plásticas por torção uniforme e torção não-uniforme são avaliadas separadamente.

Assim, tendo em conta os aspetos supra mencionados, surgiu a motivação de incidir o presente trabalho na análise e dimensionamento de perfis de aço com secção em C. Decidiu-se considerar apenas as secções de classe 1 e 2, em que, ao contrário das restantes classes (3 e 4), é possível mobilizar a totalidade da resistência plástica. Em particular, na presente Dissertação será estudada a resistência à flexão composta desviada e à torção pura, tendo como base as referências bibliográficas referidas neste subcapítulo. Na secção 1.3 encontra-se a descrição detalhada dos conteúdos de cada capítulo.

1.2 Objetivos

Esta dissertação tem como principal objetivo contribuir no sentido de colmatar a lacuna existente no EC3 relativa à verificação de segurança de secções em C, de classe 1 e 2.

Com o propósito de atingir o principal objetivo, este trabalho apresenta duas metas:

1. Estudo da resistência à flexão composta desviada de uma vasta gama de perfis comerciais com secção em C de classe 1 e 2, que resultará na determinação de ábacos, cuja função é auxiliar a determinação da respetiva resistência. Para o efeito, os objetivos específicos estabelecidos são:
 - a) Criação de um programa em MATLAB (The Mathworks Inc., 2011) para o cálculo de curvas de interação para flexão desviada dado um nível de esforço axial;
 - b) Comparação dos resultados obtidos com o programa desenvolvido com a equação fornecida pelo EC3, para secções em I, e com a equação obtida por Kitipornchai *et al.* (1991);
 - c) Estudo paramétrico da influência da geometria de uma secção na forma das curvas de interação.
2. Estudo da resistência plástica à torção de vigas em consola com secção em C, e obtenção de uma equação que traduza uma boa aproximação da respetiva resistência. Para o efeito, os objetivos específicos estabelecidos são:
 - a) Cálculo analítico dos momentos plásticos de torção uniforme e não-uniforme, para diferentes comprimentos de viga;
 - b) Criação de um modelo no programa de elementos finitos ADINA (Adina R & D, Inc., 2013) para obtenção da carga de colapso;
 - c) Comparação dos resultados obtidos nos processos mencionados nos pontos anteriores e estudo paramétrico dos mesmos.

1.3 Organização da Dissertação

O presente capítulo trata-se de um capítulo introdutório onde se encontra uma breve descrição das principais referências bibliográficas que motivaram a elaboração deste trabalho. São também mencionados os objetivos e metas propostos.

O segundo capítulo apresenta um estudo da resistência de secções em C quando sujeitas a flexão composta desviada. Na introdução encontra-se o enquadramento teórico que esteve na base desta análise. Seguem-se dois subcapítulos, em que o primeiro contém uma descrição do procedimento adotado e do programa de cálculo elaborado em MATLAB, e o segundo apresenta os resultados obtidos assim como consequentes comentários e conclusões.

O terceiro capítulo consiste no estudo da resistência de perfis de aço de secção em C quando sujeitos a efeitos de torção com empenamento restringido. O subcapítulo introdutório apresenta o enquadramento teórico que esteve na base do estudo e a descrição do processo de análise adotado. Nos dois subcapítulos seguintes encontra-se descrito o processo de obtenção de resultados, em que o primeiro consiste no cálculo analítico do momento torsor plástico e o segundo apresenta a descrição do modelo de elementos finitos, os respetivos resultados e comparação dos mesmos.

Capítulo 1. Introdução

O último capítulo apresenta uma síntese das conclusões decorrentes da elaboração deste trabalho. São também apresentados possíveis desenvolvimentos futuros com o fim de se dar continuidade a este trabalho.

Capítulo 2

Resistência à flexão composta desviada

2.1 Introdução

No presente capítulo é apresentado o estudo da resistência à flexão composta desviada de secções em C, de classes 1 e 2.

Na análise efetuada recorreu-se a um método suportado pelas seguintes hipóteses simplificativas:

1. Hipótese de Bernoulli;
2. Material elástico-perfeitamente plástico;
3. Pequenos deslocamentos.

A hipótese 1 consiste na assunção de que a secção se mantém plana e perpendicular ao eixo da peça após deformação. Assim, para uma dada linha neutra, a deformação longitudinal de um ponto genérico da secção é proporcional à curvatura do eixo e à distância à linha neutra.

De acordo com a hipótese 2, a lei constitutiva uniaxial é ilustrada na figura 2.1, não havendo limite à deformação. Finalmente, a terceira hipótese possibilita desprezar os efeitos geometricamente não-lineares, nomeadamente os efeitos da encurvadura local — por esta razão, o estudo apresentado é apenas aplicável a secções de classe 1 e 2. Nestas condições é possível aumentar a curvatura até que toda a secção tenha plastificado (por tração ou por compressão) e, consequentemente, a resistência plástica de uma secção poderá então ser calculada sabendo apenas a posição da linha neutra.

Chen e Atsuta (1977) consideraram as hipóteses simplificativas supra mencionadas e estudaram a resistência à flexão composta desviada de vários tipos de secções, entre elas as secções em C. Na mesma obra, apresentaram curvas de interação de momentos aplicados em duas direções, para diferentes níveis de esforço axial.

Kitipornchai *et al.* (1991) basearam-se no trabalho desenvolvido por Chen e Atsuta (1977) e obtiveram curvas de interação de secções mono-simétricas. Posteriormente desenvolveram equações de interação, relativas às respetivas curvas, úteis no dimensionamento à flexão composta desviada. Porém, tratam-se de equações bastante complexas e, não dependendo das dimensões da secção, são apenas válidas para as secções C10x20. De facto, as formas das curvas de interação dependem da geometria das secções para as quais são determinadas. Como será apresentado à frente, também se verificam diferenças no formato das curvas de interação

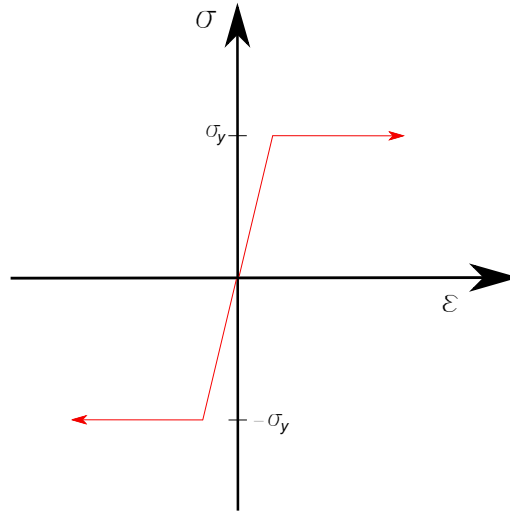


Figura 2.1: Comportamento elástico-perfeitamente plástico.

em secções do mesmo tipo mas com dimensões diferentes. Chen e Atsuta não consideraram essas diferenças significativas, pelo que apresentaram as curvas de interação para a secção que consideraram mais representativa, C10x20, pertencente ao catálogo de perfis americanos.

Neste trabalho é feita uma abordagem mais pormenorizada da influencia das dimensões das secções nas resultantes curvas de interação.

Nos subcapítulos seguintes está detalhadamente apresentado o procedimento seguido na elaboração deste estudo.

2.2 Metodologia

A metodologia adotada para estudar a resistência de secções em C quando sujeitas a flexão composta desviada é análoga à apresentada por Kitipornchai *et al.* (1991). Consiste na determinação das curvas de interação através da variação da posição da linha neutra ao longo da secção.

Primeiramente, a secção é dividida numa malha refinada de áreas elementares, como está exemplificado na figura 2.2 (a). A malha é criada com um espaçamento horizontal (l_y) e vertical (l_z). Seguidamente, gera-se uma linha neutra (LN) que divide a secção, considerando-se que as áreas acima da LN se encontram comprimidas (A^-) e as áreas abaixo da LN encontram-se tracionadas (A^+), ver figura 2.2 (b). Por convenção, as tensões de tração são positivas.

A origem do referencial coincide com o baricentro da secção, em relação ao qual os esforços são calculados.

Seguidamente, é definido um valor de esforço axial pretendido N_{target} e, mantendo o ângulo da LN, a sua distância à origem é variada até se obter, com precisão aceitável, um esforço axial igual a N_{target} . O esforço axial é dado por

$$N = \sum_{i=1}^n A_i \sigma_{yi} \quad (2.1)$$

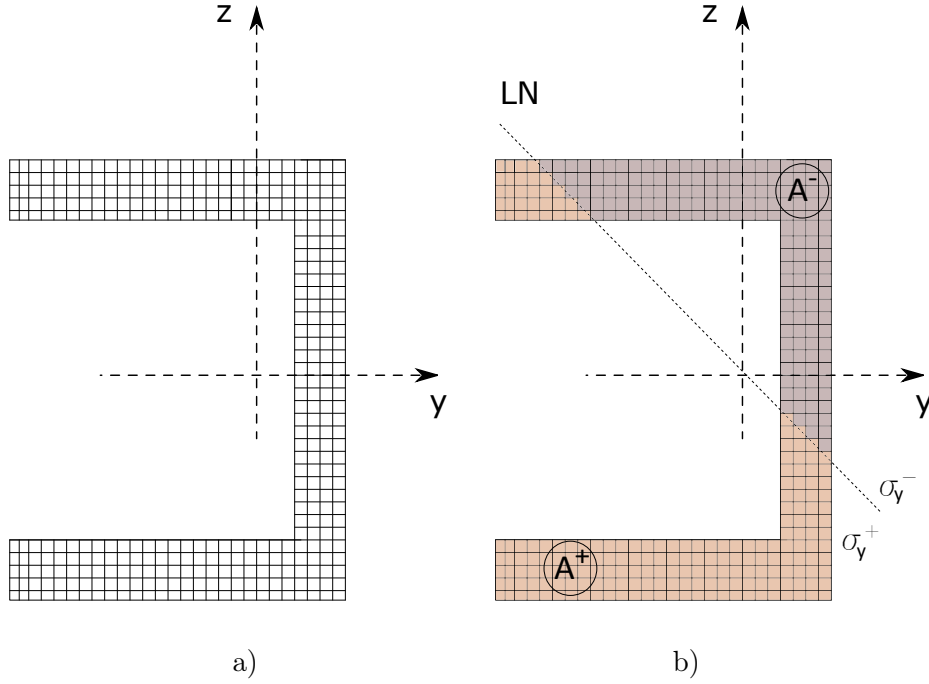


Figura 2.2: a) Discretização da secção; b) posição arbitrária da LN e sinal das tensões.

onde n o número total de áreas elementares e σ_y é a tensão de cedência do material, que será negativa se a área elementar estiver acima da LN, e positiva se a área elementar estiver abaixo da LN.

Uma vez obtido o valor do esforço axial pretendido, calculam-se os momentos fletores relativos ao eixo horizontal M_y e vertical M_z a partir de

$$M_y = \sum_{i=1}^n A_i \sigma_{yi} Z_i, \quad (2.2)$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n A_i \sigma_{yi} Y_i, \quad (2.3)$$

em que Y_i e Z_i as coordenadas dos centros das mesmas áreas relativamente aos eixos y e z , respetivamente.

Este procedimento repete-se para várias inclinações da LN percorrendo valores de 0 a 2π .

Para facilitar a análise dos resultados, estes são apresentados numa forma normalizada, i.e., dividem-se os esforços pelos seus valores plásticos totais.

$$n = \frac{N}{N_{pl}} \quad (2.4)$$

$$m_y = \frac{M_y}{M_{pl,y}} \quad (2.5)$$

$$m_z = \frac{M_z}{M_{pl,z}} \quad (2.6)$$

Os esforços plásticos totais (N_{pl} , $M_{pl,y}$ e $M_{pl,z}$) são determinados através da posição da LN plástica da secção.

Para a implementação do procedimento descrito foi utilizado o *software* MATLAB (The Mathworks Inc., 2011).

O código desenvolvido permite obter as curvas de interação de momentos fletores m_y e m_z , associadas a um valor de esforço axial n , a partir dos parâmetros geométricos de uma secção em C.

2.2.1 Descrição do programa em MATLAB

O programa é constituído por quatro "funções" que executam os processos de cálculo e disponibilizam resultados, com base no conjunto de parâmetros de entrada considerados:

- ***coordcalc.m***: define a secção, divide-a em pequenas áreas e determina os centros geométricos de cada uma delas;
- ***esfplastic.m***: determina o valor dos esforços plásticos totais da secção em análise;
- ***lneutra.m***: para uma dada inclinação e posição da LN determina o respetivo valor de esforço normal;
- ***esforcos.m***: para uma dada inclinação, determina a posição da LN cujo esforço axial é, com precisão aceitável, igual a n_{target} e calcula os momentos m_y e m_z ;

Por fim, existe um procedimento (*run.m*) que tem como parâmetros de entrada os parâmetros geométricos da secção e controla a sequência de cálculo, executando as quatro funções, na ordem e iterações necessárias, para a representação gráfica das curvas de interação.

Segue-se uma descrição mais detalhada das funções referidas.

2.2.1.1 *coordcalc.m*

Esta função inicial define a geometria da secção e divide-a em pequenas áreas. Por fim, fornece uma matriz de coordenadas dos centros geométricos de cada parcela de área.

Dadas as dimensões da secção

- b - largura dos banzos;
- H - altura da secção;
- t_w - espessura da alma;
- t_f - espessura dos banzos;

e os espaçamentos horizontal e vertical da malha,

- l_y - espaçamento na horizontal;
- l_z - espaçamento na vertical;

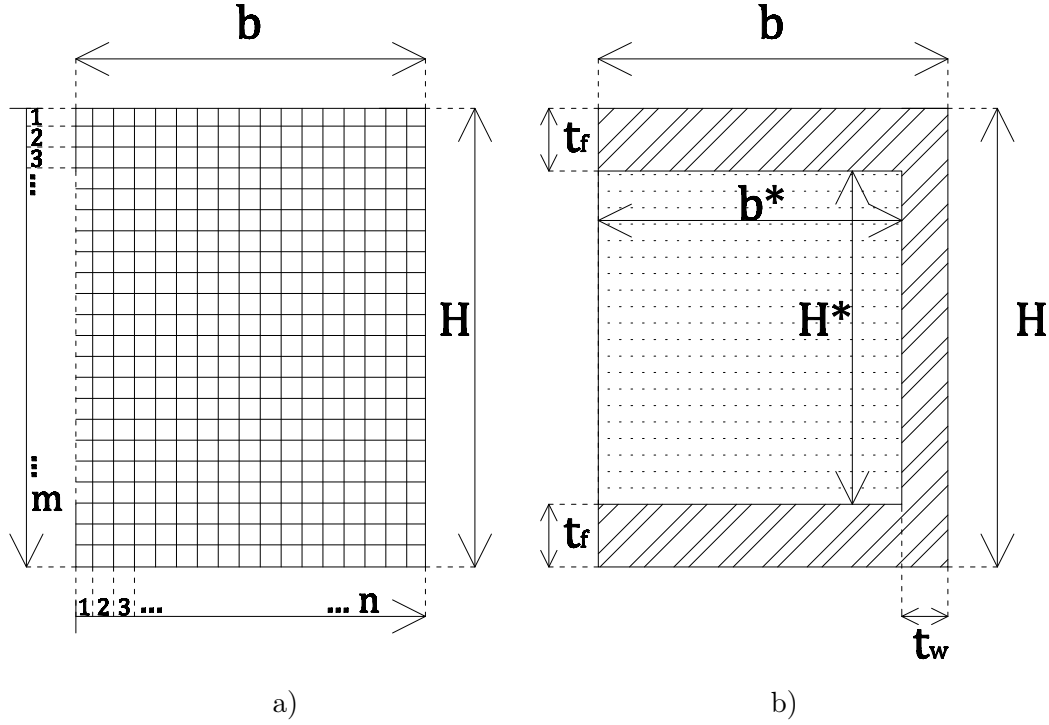


Figura 2.3: a) Malha de discretização da secção; b) secção em C e respectivas dimensões.

divide-se a área $b \times H$ em $n \times m$ parcelas de área $l_y \times l_z$, ver figura 2.3 (a).

A função determina as coordenadas (y, z) dos centros geométricos de cada área parcelar, que memoriza em dois vetores com $n \times m$ entradas, Y e Z - o primeiro guarda a coordenada horizontal, e segundo a coordenada vertical.

Às parcelas pertencentes aos banzos e alma (zona tracejada da figura 2.3 (b)) é atribuído o valor de área igual a $l_x \times l_y$. Para as restantes parcelas (zona pontilhada da figura 2.3 (b)) é atribuído o valor de área nulo. Posteriormente, um vetor A de dimensão $n \times m$ guarda o valor da área atribuída.

Para se incrementar a velocidade de cálculo do programa, simplifica-se as matrizes Y , Z e A eliminando a informação relativa às áreas parcelares de área nula. Obtém-se então os vetores finais YY , ZZ e AA .

Descrição de detalhe:

```
function[YY,ZZ,d,AA]=coordcalc2(b,H,ly,lz,tw,tf)
```

- cálculo do número de áreas elementares $N = \frac{b}{l_y}$ e $M = \frac{H}{l_z}$

```
N = b/ly; % número de elementos por linha
M = H/lz; % número de elementos por coluna
```

- definição da matriz de coordenadas

```
Y = 1:N*M; % Matriz de coordenadas em Y
Z = 1:N*M; % Matriz de coordenadas em Z
```

Capítulo 2. Resistência à flexão composta desviada

- cálculo das coordenadas do centróide do 1º elemento superior esquerdo

$$Y(1) = -b/2 + l_y/2;$$

$$Z(1) = H/2 - l_z/2;$$

- cálculo dos centróides da 1ª coluna - coordenada do centróide do 1º elemento de cada linha

```
for i = 2:M
    % índice do vetor
    j=(N*(i-1)+1);
    % a coordenada em Y mantém-se constante
    Y(j) = Y(1);
    % a coordenada em Z soma-se l_z, relativamente à linha anterior
    Z(j) = Z(1) - (i-1)*l_z;
end
```

- cálculo dos centróides dos restantes elementos

```
for k = 1:M
    for i = 2:N
        % índice do elemento do vetor
        j = (k-1)*N+i;
        % a coordenada em Y soma-se l_y, relativamente à linha anterior
        Y(j) = Y(j-1) + l_y;
        % a coordenada em z é igual à do 1º elemento da linha
        Z(j) = Z((k-1)*N+1);
    end
end
```

- determinação da distância horizontal do centro geométrico da secção rectangular ao centro geométrico da secção em C

$$1. \frac{b}{2} \times (b) \times (t_f)$$

$$2. ((b) - \frac{t_w}{2}) \times ((H) - 2 \times (t_f)) \times (t_w)$$

$$3. \frac{b}{2} \times (b) \times (t_f)$$

```
x1 = b/2;           % centróide do banzo superior
a1 = b*tf;          % área do banzo superior
x2 = b - tw/2;      % centróide da alma
a2 = (H - 2*tf)*tw; % área da alma
x3 = b/2;           % centróide do banzo inferior
a3 = b*tf;          % área do banzo inferior
d = (a1*x1 + a2*x2 + a3*x3)/((a1 + a2 + a3)-b/2)
```

- transformação da matriz das coordenadas Y do retângulo para secção em C

```
Y = Y - d;
Z = Z;
a = ly * lz; % área de cada elemento
```

- cálculo de numero de frações ($N \times M$)

```
nm = size(Y,2);
```

- anulação da área do retângulo (zona pontilhada da figura 2.3 (b))

```
A = [1:nm]; % definição da matriz da área
for i = 1:nm
    if Y(i) <= b/2 - tw - d & -(H/2 - tf) <= Z(i) & Z(i) <= (H/2 - tf)
        A(i) = 0;
    else
        A(i) = a;
    end
end;
```

- simplificação das matrizes de coordenadas e de área

```
j=0;
for i = 1:nm
    if A(i) ~= 0
        j=j+1;
    end
end % j é o número de elementos com área ~=0
AA = [1:j]; % matriz de área
YY = [1:j]; % matriz das coordenadas Y
ZZ = [1:j]; % matriz das coordenadas Z
jj = size(A,2); % número de elementos
k=0;
for i = 1:jj
    if A(i) ~= 0
        k = k+1;
        % Resultados da função
        AA(k) = A(i);
        YY(k) = Y(i);
        ZZ(k) = Z(i);
    end
end
```

2.2.1.2 *esfplastic.m*

Esta função tem o objetivo de determinar o valor dos esforços plásticos totais da secção em análise. Partindo das dimensões da secção em questão (b , H , t_w , t_f), calcula o valor dos

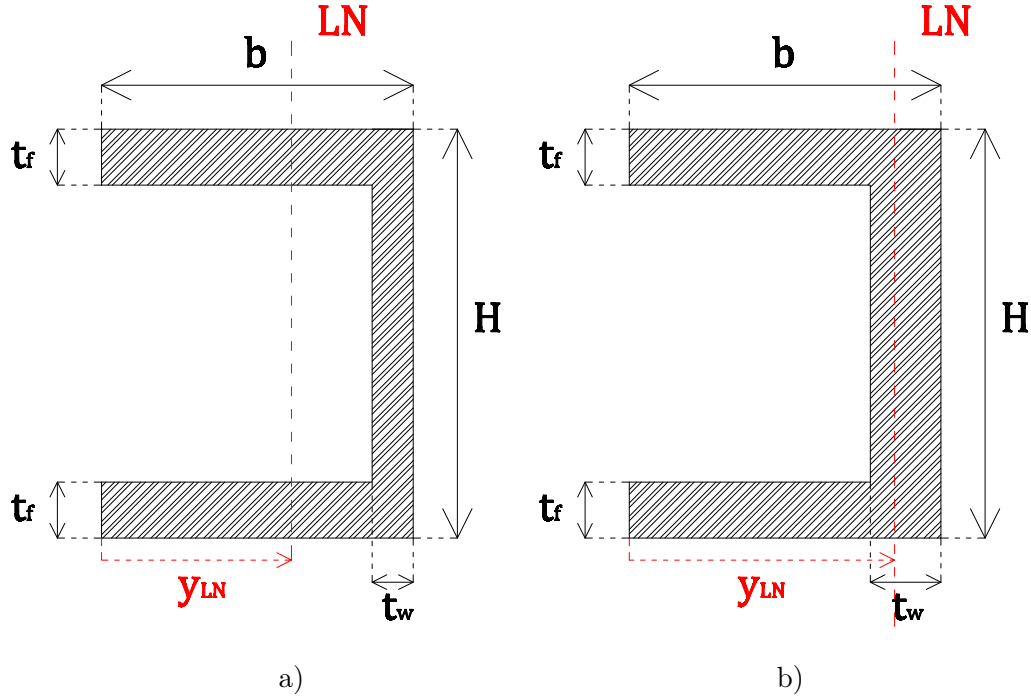


Figura 2.4: 1º e 2º caso da posição da LN vertical, respetivamente a) e b).

esforços plásticos, dados por

$$N_{pl} = \sigma_y(bH - (b - t_w)(H - 2t_f)) \quad (2.7)$$

$$M_{pl,y} = (bt_f(H/2 - t_f/2) + (1/2)t_w(H/2 - t_f)^2) \times 2. \quad (2.8)$$

Na determinação do momento plástico total relativamente ao eixo vertical ($M_{pl,z}$), teve-se especial atenção à posição da LN. Uma vez que a secção não é simétrica em relação a este eixo, a posição da linha neutra plástica (vertical) pode estar na alma ou nos banzos (ver figura 2.4).

Se a linha neutra estiver sobre os banzos o $M_{pl,z}$ é determinado através de

$$y_{LN} = \frac{2bt_f + (H - 2t_f)t_w}{4t_f} \quad (2.9)$$

$$M_{pl,z} = y_{LN}^2 t_f + (b - y_{LN})^2 t_f + (H - 2t_f)t_w \left(b - y_{LN} - \frac{t_w}{2} \right) \quad (2.10)$$

onde y_{LN} corresponde à posição da LN, contada a partir da extremidade dos banzos, como demonstra a figura 2.4 (a). No caso em que a linha neutra se posiciona sobre a alma, o $M_{pl,z}$ é determinado através de

$$y_{LN} = \frac{2Hb - Ht_w - 2(b - t_w)t_f}{2H} \quad (2.11)$$

$$M_{pl,z} = 2(b - t_w)t_f \left[\frac{b - t_w}{2} + (t_w - b + y_{LN}) \right] + H \frac{(t_w - b + y_{LN})^2}{2} + H \frac{(b - y_{LN})^2}{2} \quad (2.12)$$

onde y_{LN} corresponde à posição da LN, contada a partir da extremidade dos banzos, como demonstra a figura 2.4 (b).

Após os cálculos a função guarda o valor dos esforços totais, para posteriormente serem usados na normalização dos esforços.

Descrição de detalhe:

```
function [npl,mypl,mzpl] = esfplastic(b,H,tw,tf)
```

- determinação de N_{pl}

```
at = H*tw + 2*tf*(b-tw); % área total da secção
fy = 1; % tensão de cedência
npl = at*fy; % esforço axial plástico total
```

- determinação de $M_{pl,y}$

```
% momento em y plástico total:
mypl = (b*tf*(H/2 - tf/2) + (1/2)*tw*(H/2 - tf)^2)*2;
```

- determinação de $M_{pl,z}$

1. a linha neutra plástica passa nos banzos (figura 2.4 (a)); yln1 - distância da extremidade dos banzos à LN

$$yln1 = (2*b*tf + (H-2*tf)*tw)/(4*tf);$$

2. a linha neutra plástica passa na alma (figura 2.4 (b)); yln2 - distância da extremidade dos banzos à LN

$$yln2 = (2*H*b - H*tw - 2*(b-tw)*tf)/(2*H);$$

```
if yln1 < b
    mzpl = (yln1^2)*tf + tf*(b-yln1)^2 + (H-2*tf)*tw*(b-yln1-
    (tw/2));
else
    mzpl = 2*(b-tw)*tf*((b-tw)/2+(tw-b+yln2))+H*((tw-b+yln2)^2)/2
    +((b-yln2)^2)*(H/2);
end
```

2.2.1.3 *lneutra.m*

Esta função tem o objetivo de definir uma linha neutra e determinar de que lado cada área parcelar se encontra da mesma.

Para a definição da linha neutra, é determinada uma matriz OA , de dimensões $nm \times 3$, em que na primeira coluna guarda-se a distância horizontal de cada centro da área parcelar à origem, e na segunda coluna guarda-se a distancia vertical. Assim, a primeira e segunda colunas correspondem aos vetores YY e ZZ determinados em *coordcalc.m*, respetivamente. Tratando-se de vetores bidimensionais, a terceira linha tem valor nulo.

Paralelamente, é definido um vetor unitário $v = [-\sin(a); \cos(a); 0]$ em que a é representa a inclinação da LN relativamente ao eixo horizontal. Assim, a LN tem direção perpendicular a este vetor \vec{v} .

Definidas as matrizes e vetores mencionados nos parágrafos anteriores, para cada área parcelar é calculado o sinal da tensão e a informação é guardada num vetor S de dimensão

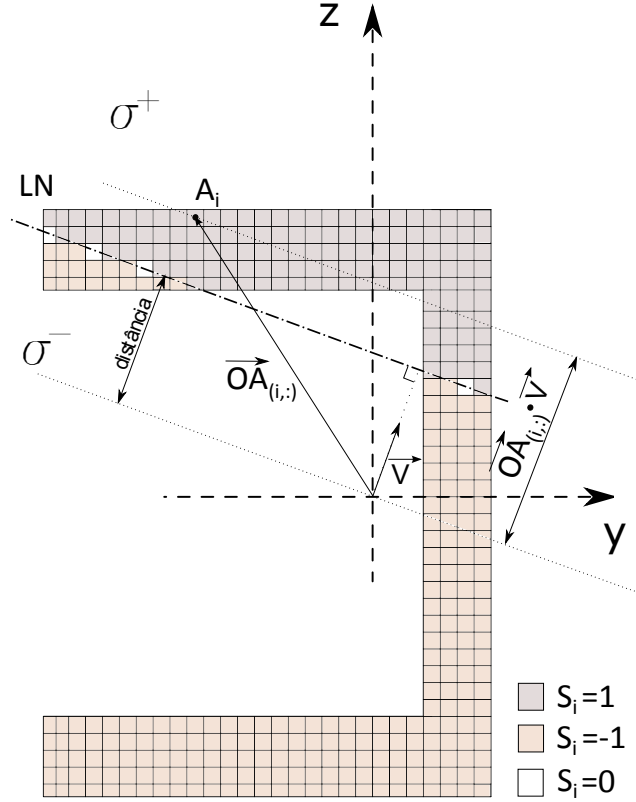


Figura 2.5: Determinação do sinal da tensão de cada área parcelar.

nm . O processo é efetuado da seguinte forma: se a área parcelar, i , estiver acima da linha neutra, então o produto interno dos vetores $\vec{OA}_{(i,:)}$ e \vec{v} será maior que a *distância*, ver figura 2.5, e terá valor de tensão positivo, $S_{(i)} = 1$, se o produto interno dos vetores $\vec{OA}_{(i,:)}$ e \vec{v} for menor que a *distância* a área parcelar, i , terá valor negativo, $S_{(i)} = -1$. Por fim, se o produto interno dos vetores $\vec{OA}_{(i,:)}$ e \vec{v} for igual à *distância*, o valor de tensão será nulo, $S_{(i)} = 0$.

Conhecido o vetor \vec{S} , procede-se ao cálculo do esforço axial a partir de

$$n = \frac{\sum_{i=1}^{nm} A_i S_i}{n_{pl}}. \quad (2.13)$$

Descrição de detalhe:

```
function [n,S] = lneutra(a,npl,YY,ZZ,AA,distancia)
```

- cálculo do número de frações de área

```
nm = size(YY,2);
```

- definição da matriz de vetores $\vec{OA}_{(i,:)}$


```

OA = zeros(nm,3);
for i = 1:nm
    OA(i,1) = YY(i);
    OA(i,2) = ZZ(i);
    OA(i,3) = 0 ;
end

```

- geração da LN

```

% V = [cos(a);sin(a);0] é o vetor da LN
V = zeros(nm,3);
S = [1:nm];
n = 0;
atot = 0;
for ij = 1:nm
    V(ij,:) = [-sin(a);cos(a);0];
    sca = OA(ij,:)*V(ij,:);

```

- cálculo do vetor das tensões

```

% cálculo do sinal da tensão para cada fração
if sca > distancia ;
    S(ij) = 1;
else
    if sca < distancia ;
        S(ij) = -1;
    else
        S(ij) = 0;
    end
end
n = n + (AA(ij)*S(ij))/npl ;
atot = atot + AA(ij);
end

```

2.2.1.4 *esforcos.m*

Esta função determina a posição de uma linha neutra, dada a sua inclinação, incrementando a distância à origem do referencial (*distância*), até que o valor de n determinado em *lneutra.m* seja suficientemente próximo do n_{target} pretendido.

Inicialmente considera-se um passo p arbitrário e a *distância* nula. Posteriormente, a função determina o esforço axial associado, n .

$$|n - n_{target}| > erro \quad (2.14)$$

Enquanto (2.14) se verificar, um ciclo efetua os seguintes passos:

- Se $|n| < |n_{target}|$ reduz-se dois passos no valor de *distância*, o passo p é reduzido a metade, e repete-se a determinação do esforço axial para a nova posição da LN.

Capítulo 2. Resistência à flexão composta desviada

- Se $|n| > |n_{target}|$ soma à *distância* um passo p e repete-se o cálculo do esforço axial para a nova posição da LN.

Este ciclo repete-se até que não se verifique a condição (2.14). Desta forma, chega-se a uma posição da linha neutra cujo o valor de esforço axial associado está suficientemente próximo do valor de n_{target} .

Por fim, determina os valores dos momentos fletores em y e z , através de

$$m_y = \frac{\sum_{i=1}^{nm} A_i S_i Z_i}{M_{pl,y}} \quad (2.15)$$

$$m_z = \frac{\sum_{i=1}^{nm} A_i S_i Y_i}{M_{pl,z}}. \quad (2.16)$$

Descrição de detalhe:

```
function [my,mz,n] = esforcos(ntarget,mypl,mzpl,npl,a,p,YY,ZZ,AA,erro)
```

- cálculo do número de frações da área

```
nm = size(YY,2);
```

- definição de n , *distância* e p iniciais

```
n = ntarget + erro + 1;  
distancia = 0;  
passo = p;
```

- cálculo da posição da LN cujo n seja o pretendido

```
while abs(n-ntarget) > erro  
    [n,S] = lneutra(a,npl,YY,ZZ,AA,distancia);  
  
    if n < ntarget  
        distancia = distancia - 2*passo;  
        passo = passo/2;  
    else  
        distancia = distancia + passo;  
    end  
end
```

- cálculo dos momentos e normalização dos mesmos

```
my = 0;  
mz = 0;  
for j = 1:nm  
    my = my+(AA(j)*S(j)*ZZ(j))/mypl;  
    mz = mz+(AA(j)*S(j)*YY(j))/mzpl;  
end
```

2.2.1.5 run.m

Este procedimento controla as funções referidas anteriormente. Para proceder à representação gráfica das curvas de interação, é necessário definir os parâmetros de entrada discretizados na lista abaixo:

- α , β e γ - parâmetros geométricos da secção, dados por

$$\alpha = \frac{H^*}{b^*}, \quad \beta = \frac{H^*}{t_w}, \quad \gamma = \frac{b^*}{t_f}; \quad (2.17)$$

- H - altura da secção;
- l_y e l_z - dimensões em y e z das áreas parcelares da secção;
- p - passo inicial de incremento da distancia da linha neutra à origem;
- T - passo de incremento da inclinação da linha neutra, em radianos;
- n_{target} - define o esforço axial para o qual se pretende determinar a curva de interação. São definidos seis valores para este parâmetro, $n_{target} = [0; 0, 2; 0, 4; 0, 6; 0, 8; 1]$;

Através do passo de incremento da inclinação, calcula-se o número total de inclinações que a linha neutra irá percorrer, $t_n = \frac{2\pi}{T}$. O valor dos mesmos é guardado num vetor a de dimensão t_n .

Em primeiro lugar é chamada a função *coordcalc.m*, para definir a geometria da secção e guardar a informação das coordenadas dos centróides de cada área parcelar. De seguida, *esfplastic.m*, determina os esforços plásticos totais da respetiva secção.

Posteriormente, para um determinado n_{target} e para as várias inclinações da linha neutra a_i é chamada a função *esforcos.m*. Numa matriz $T_{ESFORCO\ i}$ de dimensões $t_n \times 5$, guarda em cada coluna os valores de n_{target} , a_i , n , m_y e m_z , respetivamente. Este procedimento repete-se, da mesma forma, para os seis n_{target} definidos.

Após determinadas as seis matrizes $T_{ESFORCO\ i}$, é feita a representação gráfica das duas últimas colunas das seis matrizes no mesmo gráfico, criando-se assim as curvas de interação requeridas.

Descrição de detalhe:

- parâmetros de entrada

```
alpha = __ ;
beta = __ ;
gama = __ ;
HH = 100; % H*
erro = 0.005;
ly = 0.1;
lz = 0.1;
p = 20;
T = pi/40; % T - passo de incremento das inclinações da linha neutra
ntarget1 = 0;
ntarget2 = 0.2;
```

```
ntarget3 = 0.4;
ntarget4 = 0.6;
ntarget5 = 0.8;
ntarget6 = 1;
```

- cálculo das dimensões da peça

```
bb = HH/alpha; % b*
tf = round(bb/gama);
tw = round(HH/beta);
b = round(bb + tw);
H = round(HH + 2*tf);
```

- chamada das funções que definem a secção e os esforços plásticos totais

```
[YY,ZZ,d,AA] = coordcalc2(b,H,ly,lz,tw,tf);
[npl,mypl,mzpl] = esfplastic(b,H,tw,tf);
```

- definição do número total de divisões da área

```
nm = size(ZZ,2);
```

- definição da matriz de resultados

```
TESFORCO(i)=zeros(size(NTARGET,2)*tn,5) ;
```

- geração das inclinações da LN

```
tn = ceil((2*pi)/T); % tn é o número total de inclinações
a = [1:tn];
a(1)=0;
for i = 2:tn
    a(i)= a(i-1)+T;
end
```

- cálculo das matrizes de resultados

```
k = 1;
ntarget = ntarget1
for l=1:tn
    [my,mz,n] = esforcos(ntarget,mypl,mzpl,npl,a(l),p,YY,ZZ,AA,erro);
    TESFORCO1(k,:) = [ntarget,a(l),n,my,mz];
    k=k+1;
    '-----'
end
```

O cálculo repete-se para os restantes n_{target} .

- construção do gráfico das curvas de interação

```
plot(TESFORC01(:,4),TESFORC01(:,5),TESFORC02(:,4),...
title('__')
xlabel('My'); ylabel('Mz');
grid on
```

A figura 2.6 representa um fluxograma que sumariza o procedimento adotado na elaboração do programa.

2.3 Resultados

2.3.1 Validação

Para validar o programa e garantir a precisão dos resultados obtidos, calcularam-se as curvas de interação para uma secção C10x20 e compararam-se os resultados com os obtidos por Chen e Atsuta (1977). Na tabela 2.1 apresenta-se os valores das dimensões da secção C10x20 (ver figura 2.7).

Tabela 2.1: Dimensões da secção em C10x20.

	H (in)	b (in)	t_w (in)	t_f (in)	H^* (in)	b^* (in)	α	β	γ
C10x20	10	2,2739	0,397	0,436	9,128	1,877	4,86	22,99	4,30

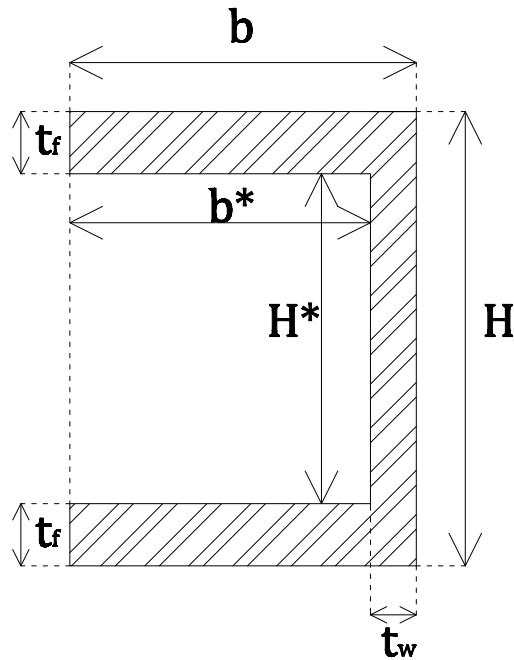


Figura 2.7: Parâmetros geométricos de uma secção em C.

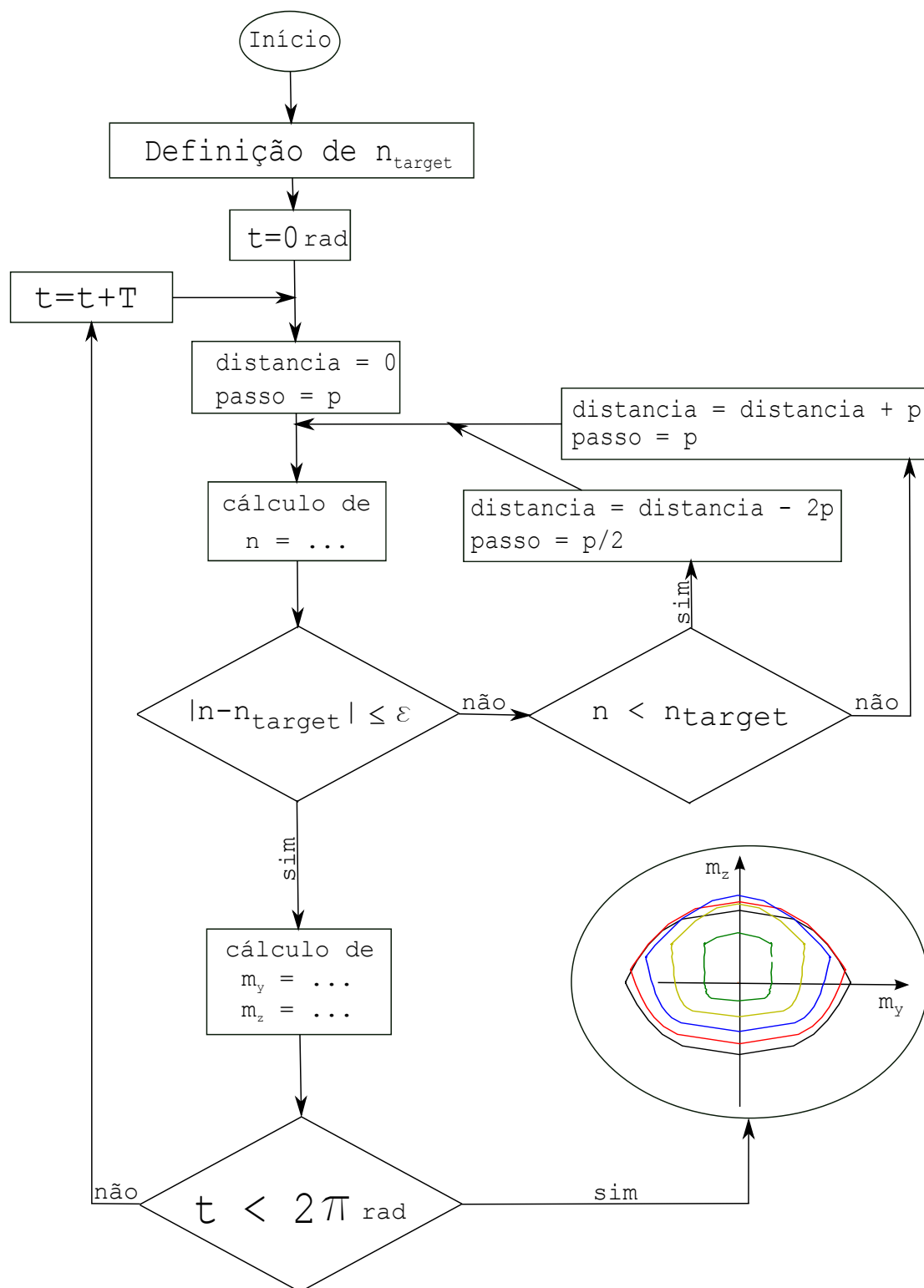


Figura 2.6: Fluxograma do procedimento de cálculo.

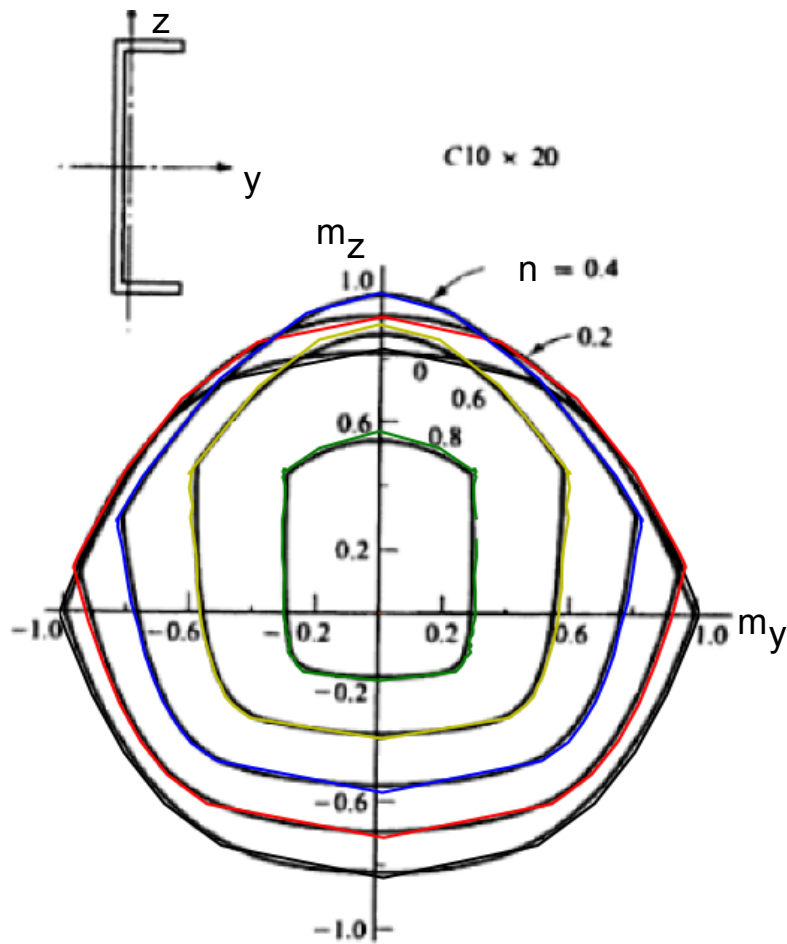


Figura 2.8: Curvas de interação obtidas com o programa em MATLAB (a cores) e os obtidos por Chen e Atsuta (1977) (a negro).

A figura 2.8 representa as curvas de interação obtidas por Chen e Atsuta sobrepostas com as obtidas com o programa desenvolvido em MATLAB (linhas a cores). É de salientar que estas curvas foram obtidas normalizando os esforços em relação ao seu valor máximo, o que no caso de M_z , corresponde a utilizar um momento plástico superior ao correspondente à flexão reta e pura (este assunto é discutido um pouco mais à frente). Como se pode observar na figura 2.8, a geometria e o desenvolvimento das curvas de interação representadas são idênticos, facto que permite validar os resultados obtidos com o programa desenvolvido.

Na figura 2.9 representa-se as curvas de interação da secção C10x20 normalizadas em relação aos esforços plásticos totais. Observe-se que quando o esforço axial é nulo, os momentos m_y e m_z tomam o valor plástico total, sendo que $m_y = m_z = 1$.

Outra particularidade importante de referir relativamente a este tema, é o facto de a existência de simetria nas curvas de interação influencia a existência de simetria das respetivas secções transversais. Assim, no caso de secções em C, tendo um eixo de simetria horizontal, as curvas de interação são simétricas relativamente ao eixo vertical (m_y). No caso das secções em I, tratando-se de secções com dois eixos de simetria (vertical e horizontal) as curvas de interação têm também dois eixos de simetria (horizontal e vertical, respetivamente), ver figura 2.10.

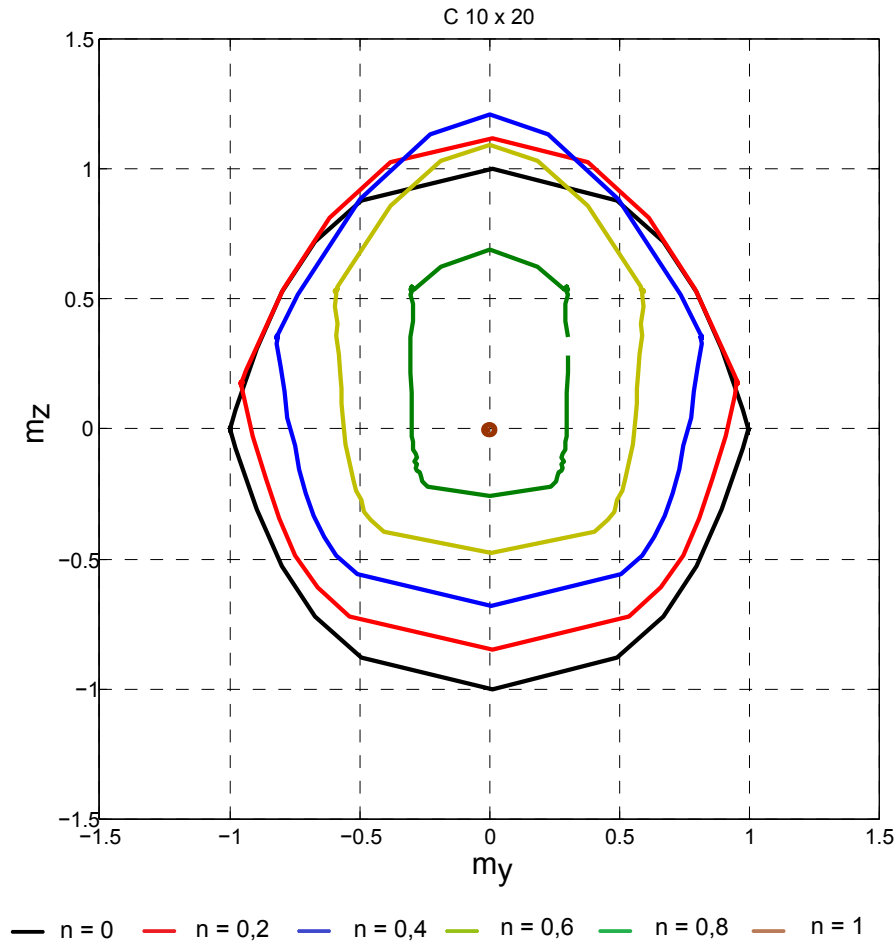


Figura 2.9: Curva de interação - secção C10x20

É de referir que as curvas de interação representadas na figura 2.9 correspondem a uma secção sujeita à tração. Caso a secção esteja sujeita a compressão, as curvas de interação sofrem uma rotação de 180° . A figura 2.11 representa a sobreposição das curvas de interação da secção C10x20 para tração e compressão.

Outro fenómeno de grande relevância é o facto de o momento resistente relativamente ao eixo de menor inércia aumentar com o aumento do esforço axial, tomando valores superiores à unidade. Na figura 2.12 representa-se um alçado das curvas de interação da secção C10x20, para uma melhor percepção deste fenómeno. A presença de esforço axial numa secção bi-simétrica provoca uma redução do momento plástico resistente. No entanto, para secções mono-simétricas pode ocorrer um acréscimo do momento plástico.

Como se pode observar na figura 2.13, que representa a curva de interação de momento fletor e esforço axial de uma secção em T, este fenómeno também ocorre neste tipo de secções. O primeiro quadrante representa um perfil deste tipo sujeito a esforço axial e momento fletor positivos e, como se pode observar, o aumento do esforço axial provoca aumento do momento resistente, até ao baricentro da secção, e diminuição do mesmo a partir desse mesmo ponto.

Seguidamente é explicado o fenómeno supra mencionado considerando secções em T.

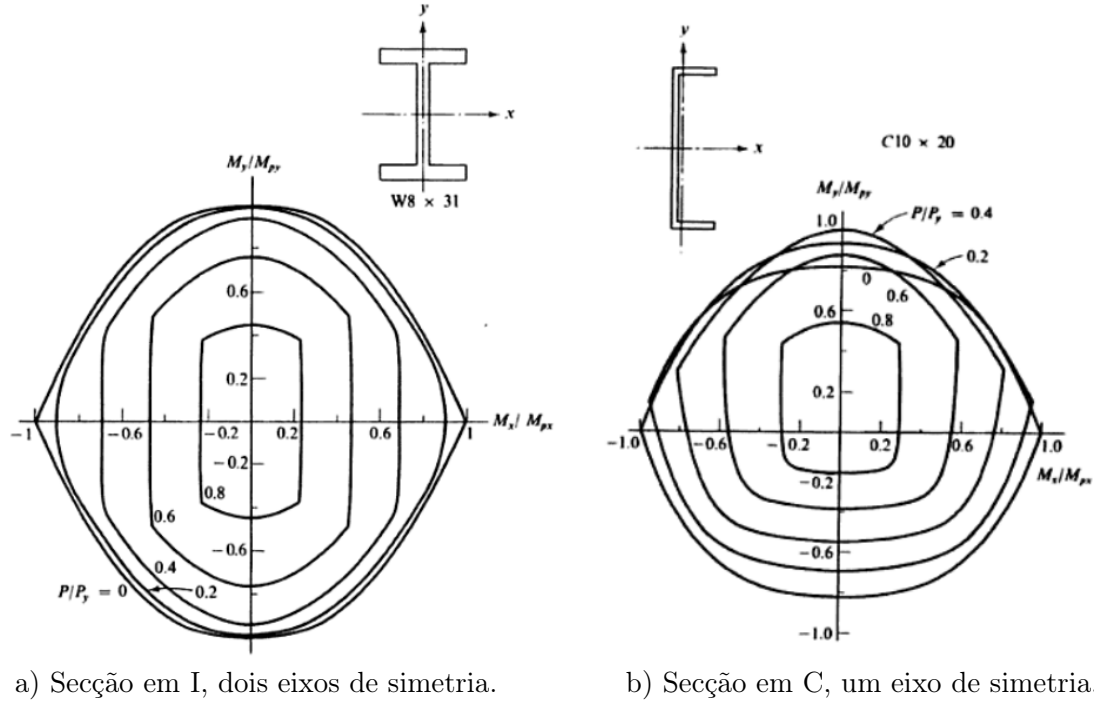


Figura 2.10: Relação de simetria das secções com as respectivas curvas de interação. (Fonte: Chen e Atsuta, 1977).

Considere-se uma secção representada na figura 2.14. A posição do baricentro, contada a partir do topo da secção, é dada por

$$y_G = \frac{A_f y_f + A_w y_w}{A} \quad (2.18)$$

em que A corresponde à área total da secção, A_f e A_w são as áreas do banzo e da alma, e y_f e y_w representam a distância entre o baricentro da secção e os baricentros do banzo e da alma, respetivamente.

Assumindo que a linha neutra plástica se encontra na alma, a distância da mesma ao topo da secção será

$$y_{pl} = t_f + H - \frac{A}{2t_w}. \quad (2.19)$$

Para simplificação de cálculos, são introduzidos os seguintes parâmetros

$$a = \frac{t_f}{t_w}, \quad b = \frac{H}{b_f}, \quad c = \frac{t_w}{H}. \quad (2.20)$$

O momento plástico total da secção (M_{pl}) corresponde ao momento obtido em relação à linha neutra plástica. O momento plástico máximo corresponde ao momento obtido quando a LN passa no baricentro da secção ($M_{pl,G}$). São determinados os valores de ambos os momentos e o valor de $M_{pl,G}$ é normalizado relativamente a M_{pl} . Assim obtém-se

$$m = \frac{b^2(4a^2 + 4ab + 4a^3c + b^2 + 2a^2bc + a^4c^2)}{(a+b)^2(2a^2bc + 2ab + b^2 + a^2)} \quad (2.21)$$

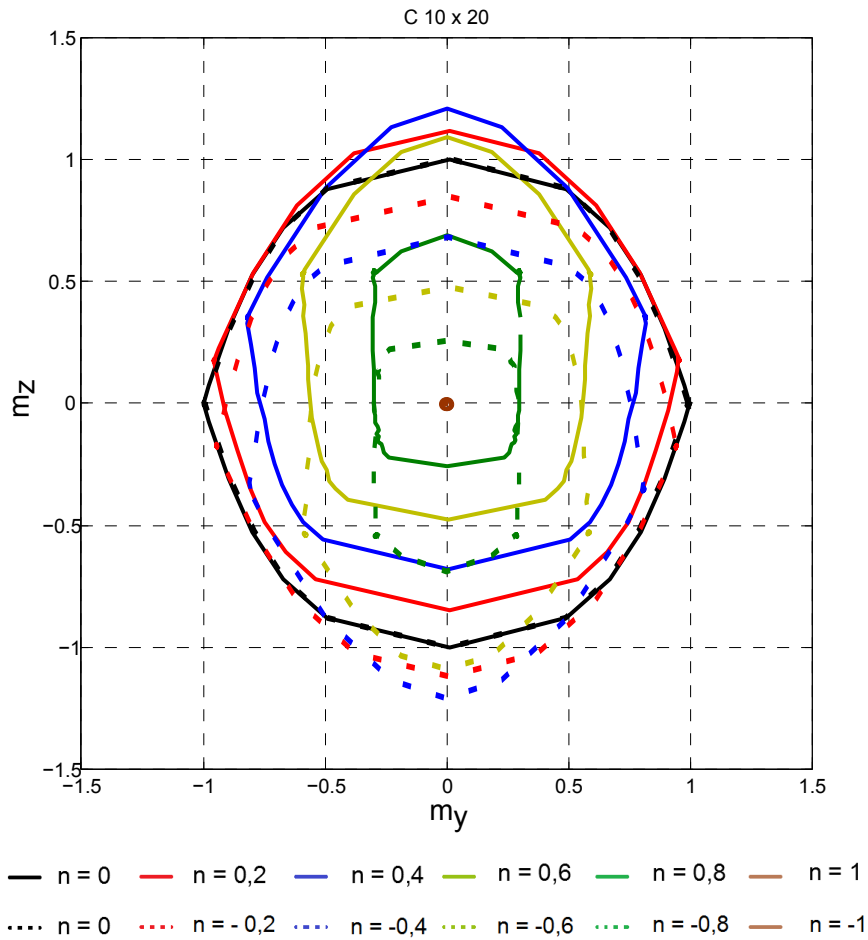


Figura 2.11: Curvas de interação da secção C10x20 à compressão (linhas a tracejado) e à tração (linhas contínuas).

Considerando $a = 1$, $c = 0,2$ e b com valores entre 1 e 5, o cálculo de m resulta no gráfico representado na figura 2.15. Como se pode observar, o momento atinge valores superiores à unidade devido ao facto de a linha neutra plástica em flexão pura não coincidir com o baricentro da secção.

O parâmetro b , que representa a esbelteza da secção, tem influência no momento máximo. Quanto menor for a esbelteza da secção, mais distante está a LN plástica do baricentro, e, por conseguinte, maior é o aumento do momento resistente.

Considerando também o parâmetro c variável, obtém-se o gráfico representado na figura 2.16. O parâmetro c representa a esbelteza da alma e, como se pode observar, para menores valores de b , também tem influência no momento máximo da secção. Para os valores de b e c considerados, a linha neutra plástica da secção encontra-se na alma.

Em secções em C sucede o mesmo fenómeno, para a flexão em torno do eixo de menor inércia. Assim, em certas secções, o aumento do esforço axial provoca um aumento de resistência relativamente ao eixo z .

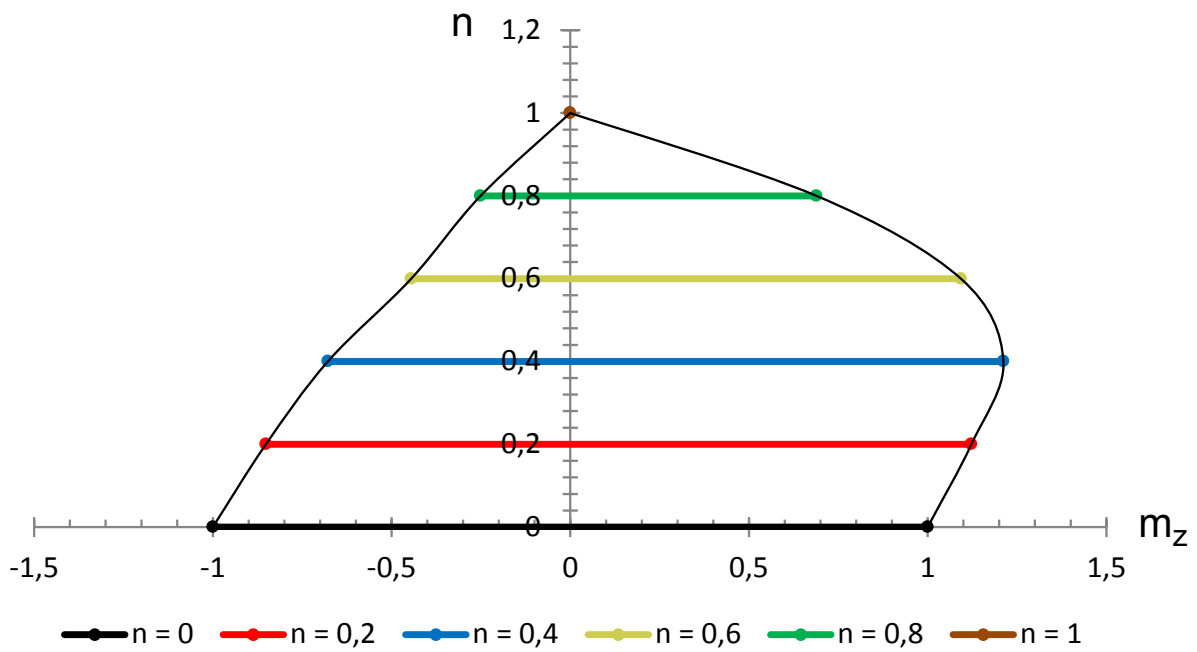


Figura 2.12: Curvas de interação da secção C 10x20 no plano $n-m_z$.

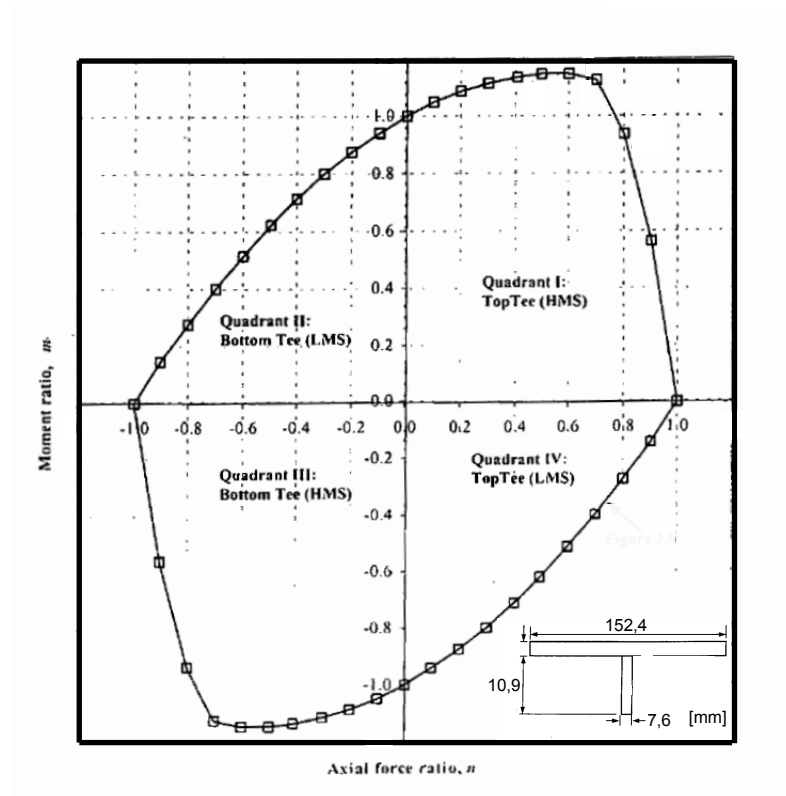


Figura 2.13: Curva de interação de esforço axial e momento fletor numa secção em T (Hang, 2002).

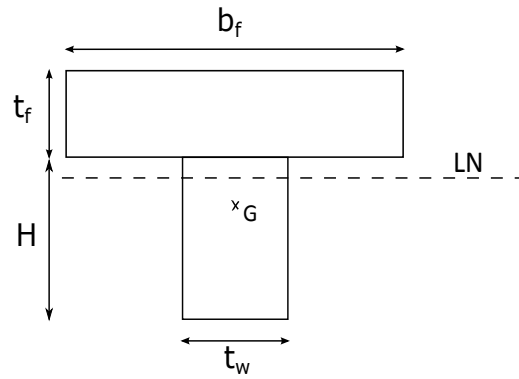


Figura 2.14: Geometria de uma secção em T e representação da posição LN assumida nos cálculos.

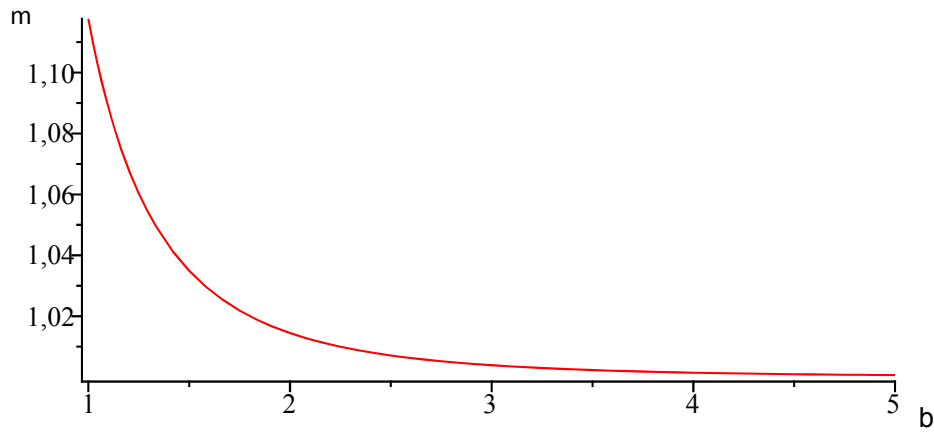


Figura 2.15: Relação do momento resistente máximo normalizado com o parâmetro b (esbelteza da secção).

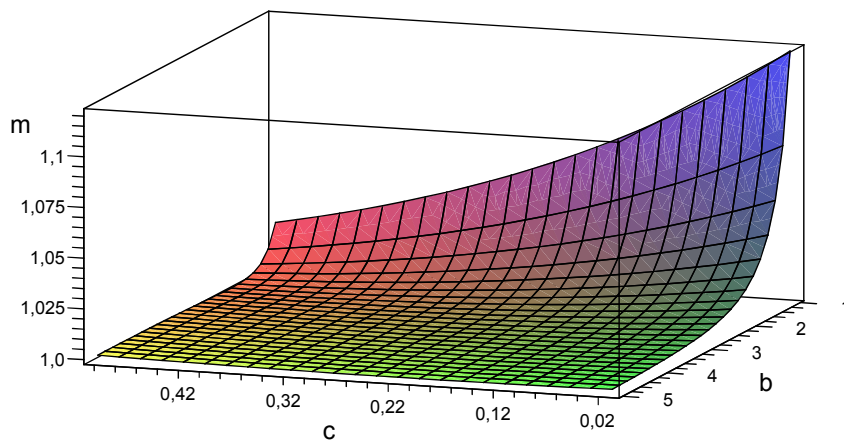


Figura 2.16: Relação do momento resistente máximo normalizado com os parâmetros b (esbelteza da secção) e c (esbelteza da alma).

2.3.2 Comparação com o Eurocódigo 3

Nesta secção estuda-se a aplicabilidade das fórmulas do EC3 para secções em C.

Quando uma secção está sujeita a flexão composta desviada, o EC3 apresenta a seguinte equação para verificar a segurança da secção

$$\left[\frac{M_{y,Ed}}{M_{N,y,Rd}} \right]^\alpha + \left[\frac{M_{z,Ed}}{M_{N,z,Rd}} \right]^\beta \leq 1, \quad (2.22)$$

onde $M_{N,Rd}$ representa o valor de cálculo dos momentos fletores resistentes plásticos reduzidos pelo esforço normal, sendo dados por

$$M_{N,y,Rd} = M_{pl,y,Rd} \frac{(1-n)}{(1-0,5a)} \quad \text{mas} \quad M_{N,y,Rd} \leq M_{pl,y,Rd} \quad (2.23)$$

onde $a = \frac{A-2bt_f}{A}$ mas $a \leq 0,5$

$$M_{N,z,Rd} = M_{pl,z,Rd} \quad \text{se} \quad n \leq a \quad (2.24)$$

$$M_{N,z,Rd} = M_{pl,z,Rd} \left[1 - \left(\frac{n-a}{1-a} \right)^2 \right] \quad \text{se} \quad n > a \quad (2.25)$$

com $n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}}$.

Estas fórmulas são aplicáveis a secções de classe 1 e 2 dos tipos I ou H com banzos iguais, desde que não seja necessário tomar em consideração os furos das ligações. O EC3 fornece valores para os parâmetros α e β , sendo que para secções em I ou H

$$\alpha = 2 \quad \text{e} \quad \beta = 5n, \quad \text{mas} \quad \beta \geq 1. \quad (2.26)$$

No que diz respeito a secções em C, as equações e as respectivas constantes não são especificadas na norma em análise.

Como já foi referido na secção 2.3.1, as curvas de interação de uma secção em C têm apenas um eixo de simetria (y). Assim, podem ser representadas pelo 1º e 4º quadrante do referencial $m_y - m_z$.

Na medida em que o EC3 apenas considera o valor absoluto dos esforços, os resultados devolvidos pela equação (2.22) apresentam-se no 1º quadrante, o que não é suficiente para representar as curvas de interação de secções em C. Naturalmente, para secções em I, em que os eixos y e z são eixos de simetria, este facto não é relevante, pois as curvas de interação podem ser representadas no 1º quadrante, ver figura 2.10 (a).

A figura 2.17 apresenta, a traço interrompido, as curvas de interação considerando a fórmula do EC3 para secções C10x20, e em linhas contínuas as curvas de interação obtidas com o programa desenvolvido (recordar figura 2.9).

Analisando a figura 2.17 pode-se concluir que a equação do EC3, em geral, fornece resultados do lado da segurança para $m_z > 0$. Contudo, para além de ser pouco precisa, conduz a resultados contra a segurança para $m_z < 0$. Assim sendo, para efeitos de dimensionamento, esta fórmula não se deve ser aplicada a perfis de aço com secção em C.

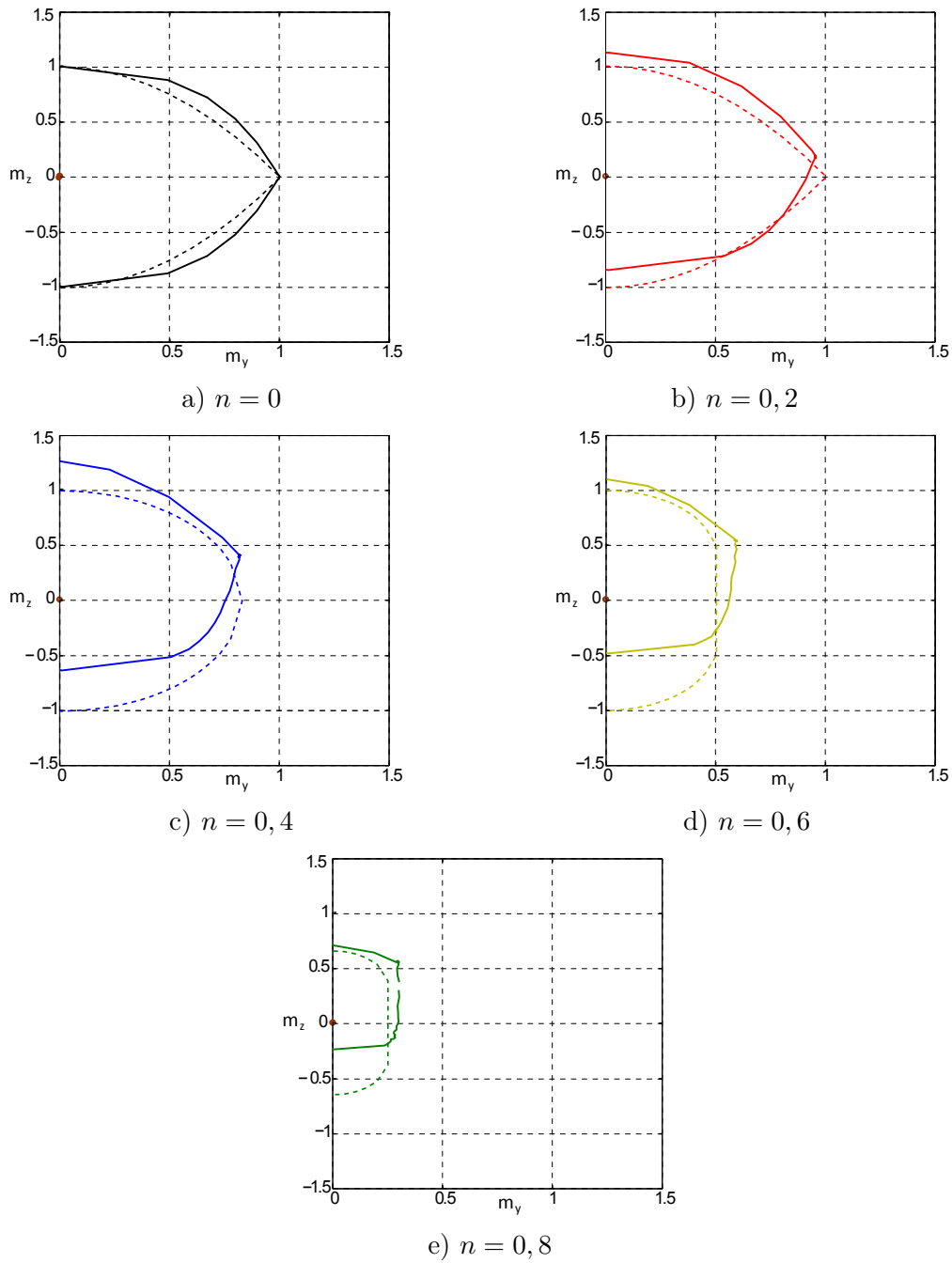


Figura 2.17: Comparação entre as curvas de interação da secção C10x20 obtidas segundo o EC3 (traço interrompido) e o programa em MATLAB (traço contínuo).

2.3.3 Comparação com a fórmula de Kitipornchai *et al.* (1991)

Como foi anteriormente mencionado, Kitipornchai *et al.* (1991) apresentaram uma fórmula para verificar a segurança de secções em C sujeitas a flexão composta desviada. A equação depende de aproximadamente 20 termos, tratando-se assim de uma solução bastante complexa e de difícil utilização. Por outro lado, esta equação não tem em conta as dimensões da secção,

pelo que apenas representa com precisão as curvas de interação para a secção C10x20. Os autores basearam-se na assunção de Chen e Atsuta (1977), que considera que as curvas de interação da referida secção são representativas para uma vasta gama de perfis de aço em C. No entanto, como se demonstra no subcapítulo seguinte, as dimensões da secção têm de facto influência nas respetivas curvas de interação e, por conseguinte, a equação de Kitipornchai *et al.* é apenas precisa para a secção C10x20.

A figura 2.18 permite a comparação entre as das curvas de interação exatas e aproximadas (equação), obtidas por Kitipornchai *et al.* (1991).

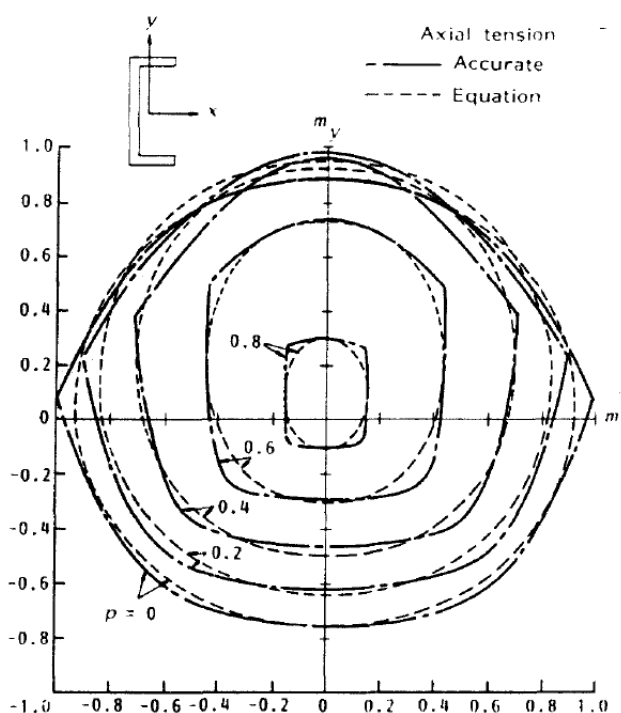


Figura 2.18: Curvas de interação (exatas e aproximadas) obtidas por Kitipornchai *et al.* (1991).

2.3.4 Estudo paramétrico

Nesta secção estuda-se a variação das formas das curva de interação para os perfis comerciais europeus UPE e UPN. Para isso, começou-se por determinar os parâmetros geométricos (α , β e γ) para todas as secções. Recordando, estes parâmetros representam a esbelteza da secção α , a esbelteza da alma β e a esbelteza dos banzos γ , e são dados pelas equações (2.17). Estes valores podem ser consultados no anexo A.1. Os valores extremos são fornecidos na tabela 2.2.

Os valores apresentados na tabela 2.2 foram representados num referencial cartesiano tridimensional, e assim se obteve um paralelepípedo cujos vértices correspondem aos casos extremos dos parâmetros geométricos. Estes valores estão representados por quadrados pretos na figura 2.19, e os pontos marcados a vermelho e verde correspondem aos perfis comerciais UPE e UPN, respetivamente. Na figura estão representadas as vistas laterais do paralelepípedo,

Tabela 2.2: Valores extremos dos parâmetros geométricos.

	α	β	γ
máximo	3,93	32,4	6,875
mínimo	1,09	7,2	4,71

para uma melhor percepção da variação dos parâmetros geométricos com os perfis comerciais UPE e UPN.

Nas figuras 2.20 e 2.21 estão representadas as curvas de interação para as secções correspondentes aos vértices do paralelepípedo da figura 2.19. A primeira figura apresenta as curvas de interação de secções correspondentes aos vértices inferiores do paralelepípedo, coincidentes com o plano correspondente ao valor mínimo de γ . A segunda figura apresenta as curvas de interação de secções correspondentes aos vértices superiores do paralelepípedo, que coincidem com o plano correspondente ao valor máximo de γ .

Após observação das curvas de interação, conclui-se que o parâmetro γ não faz variar significativamente os resultados. O mesmo não se pode concluir relativamente aos parâmetros α e β . Assim sendo, com a finalidade de se obter uma melhor percepção da influência dos parâmetros α e β na forma das curvas, optou-se por efetuar duas subdivisões no paralelepípedo representado na figura 2.19.

A primeira subdivisão corresponde a um plano de corte paralelo ao plano (α, γ), definido pela condição $\beta = 19,8$, sendo este o valor intermédio do respetivo parâmetro. A segunda subdivisão corresponde a um plano de corte paralelo ao plano (β, γ), definido pela condição $\alpha = 2,5$, sendo este o valor intermédio do respetivo parâmetro.

Tabela 2.3: Valores dos parâmetros geométricos após subdivisões.

	α	β	γ
mínimo	1,09	7,2	4,71
médio	2,5	19,8	-
máximo	2,5	32,4	6,875

Na figura 2.22 representa-se as subdivisões efetuadas. Como resultado da intersecção dos planos supra mencionados, o paralelepípedo anteriormente definido por oito vértices é agora dividido em quatro partes iguais.

Os pontos gerados devido às duas subdivisões efetuadas coincidem com as combinações dos valores máximos, mínimos e intermédios dos parâmetros geométricos.

Nas figuras 2.23 e 2.24 e 2.25 apresentam-se as curvas de interação das secções correspondentes aos pontos marcados a preto na figura 2.22.

Analisando o resultados e comparando as figuras 2.23 a), 2.23 b), 2.23 c), 2.23 d), 2.25 b) com as figuras 2.24 b), 2.24 c), 2.24 d), 2.25 a) e 2.24 a) respetivamente, reforça-se o facto de que o parâmetro γ não tem influência significativa nos resultados. Sendo que as primeiras correspondem a secções com valores de γ mínimos e as seguintes a valores de γ máximos.

Verifica-se uma variação dos resultados com o parâmetro α e, relativamente a β , conclui-se que este parâmetro tem influência na variação dos resultados em secções cujo o valor de α é máximo.

Os resultados apresentados poderão ser usados como ábacos de determinação da resistência de secções em C à flexão composta e desviada. Dependendo dos parâmetros α e β , o projetista

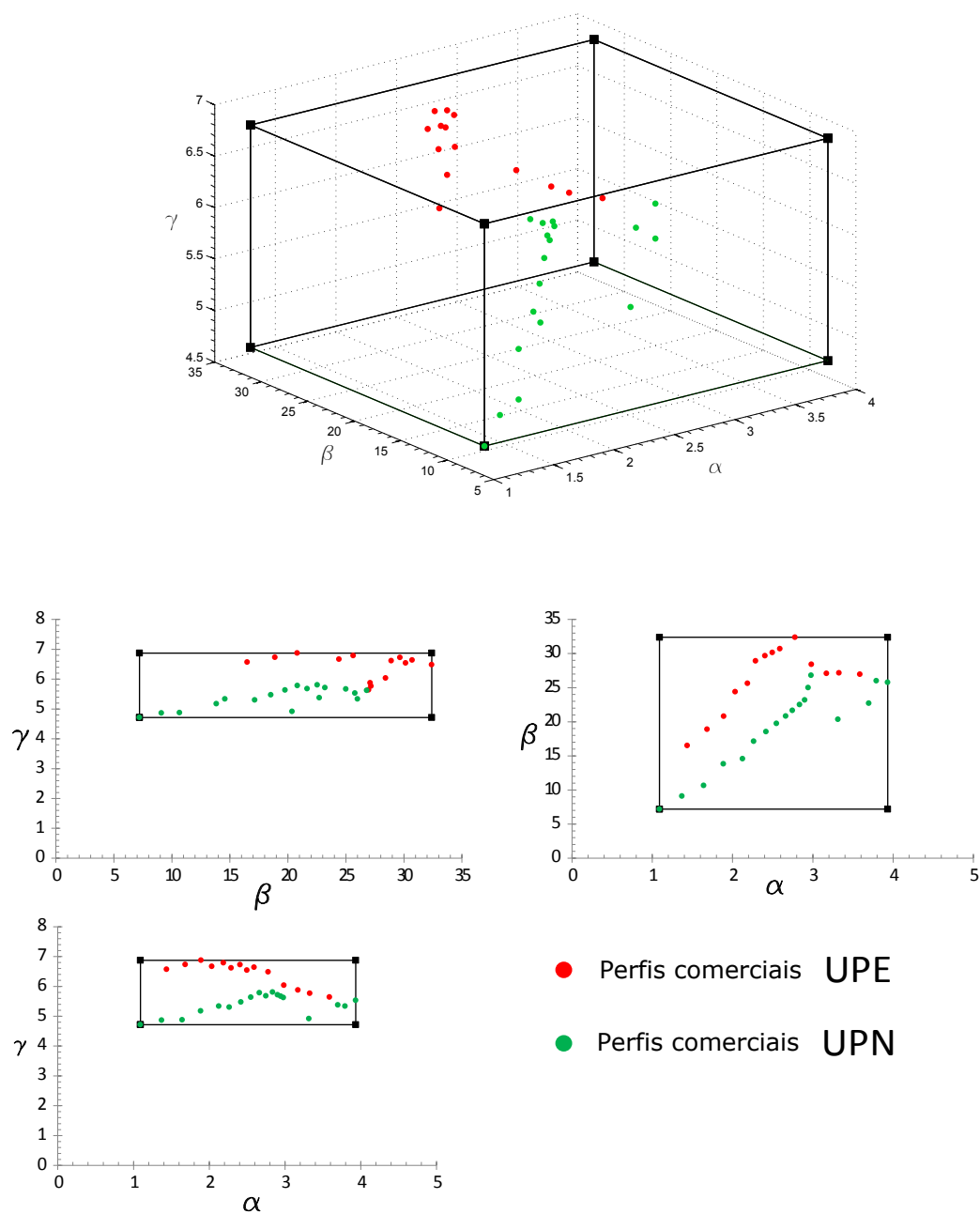


Figura 2.19: Valores de α , β e γ para os perfis UPN e UPE.

poderá consultar os ábacos disponíveis no anexo A de forma a obter a resistência da secção pretendida.

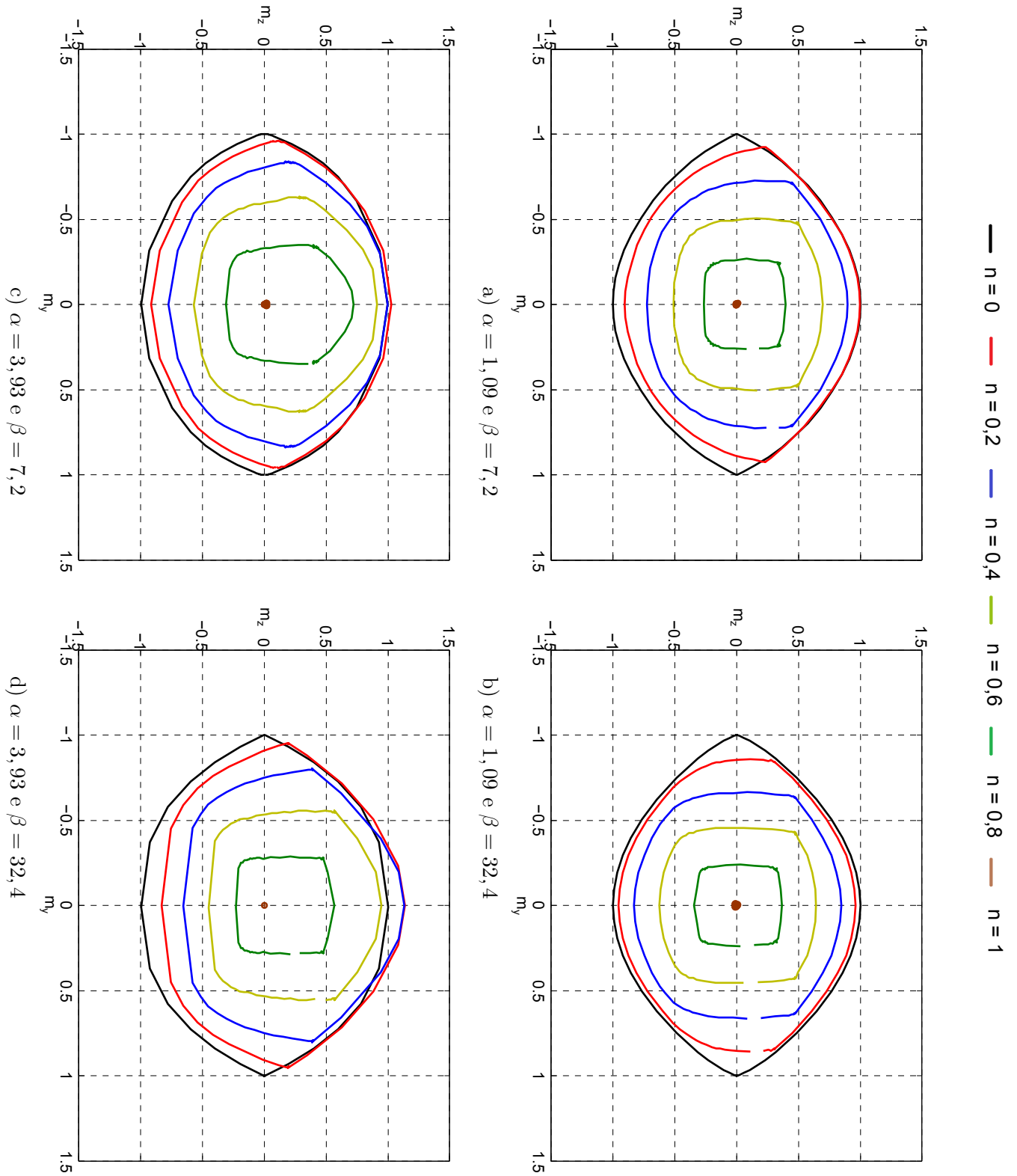


Figura 2.20: Diagramas de interação correspondentes aos quatro vértices inferiores do paralelepípedo, $\gamma = 4,71$.

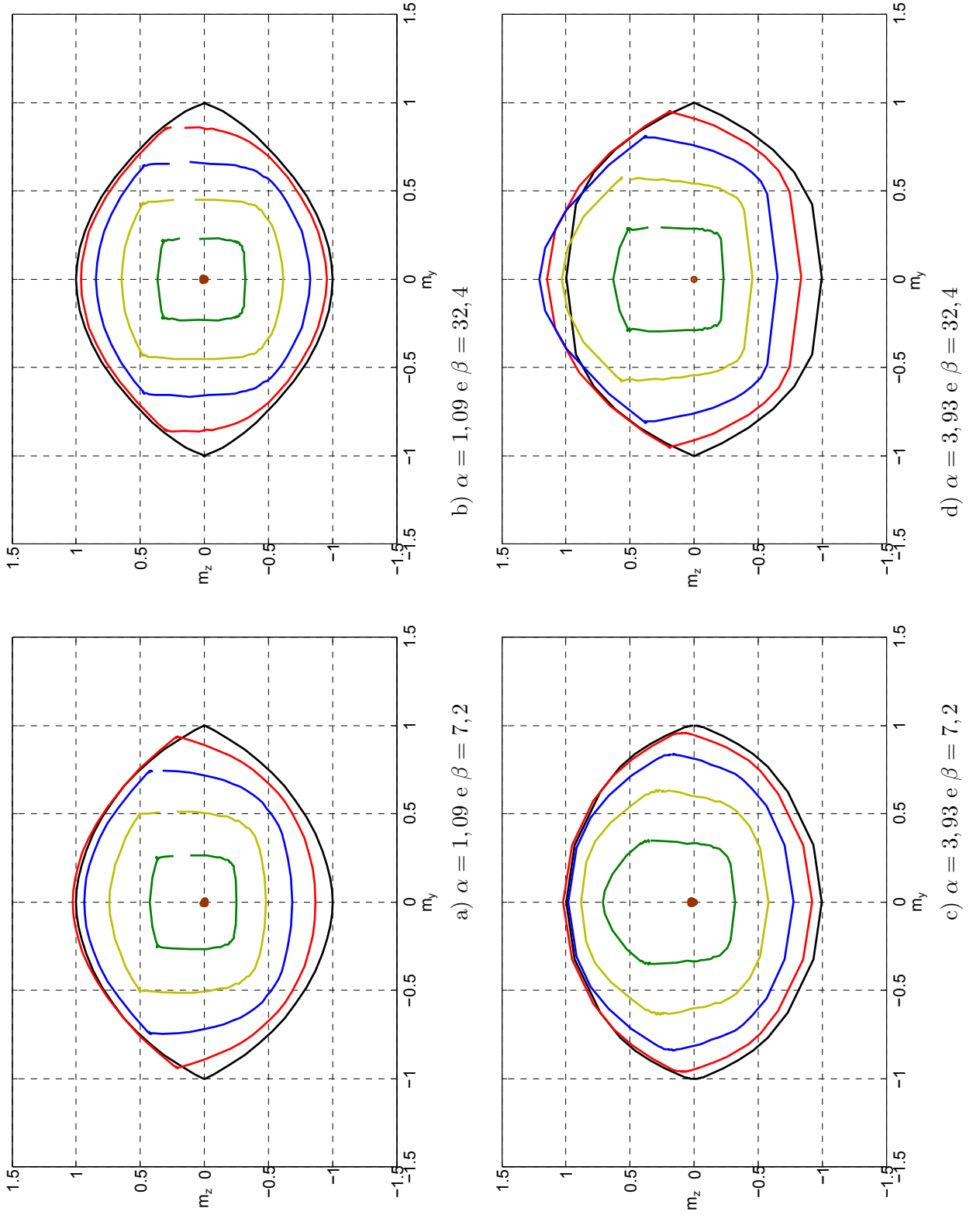


Figura 2.21: Diagramas de interação correspondentes aos quatro vértices superiores do paralelepípedo, $\gamma = 6,875$.

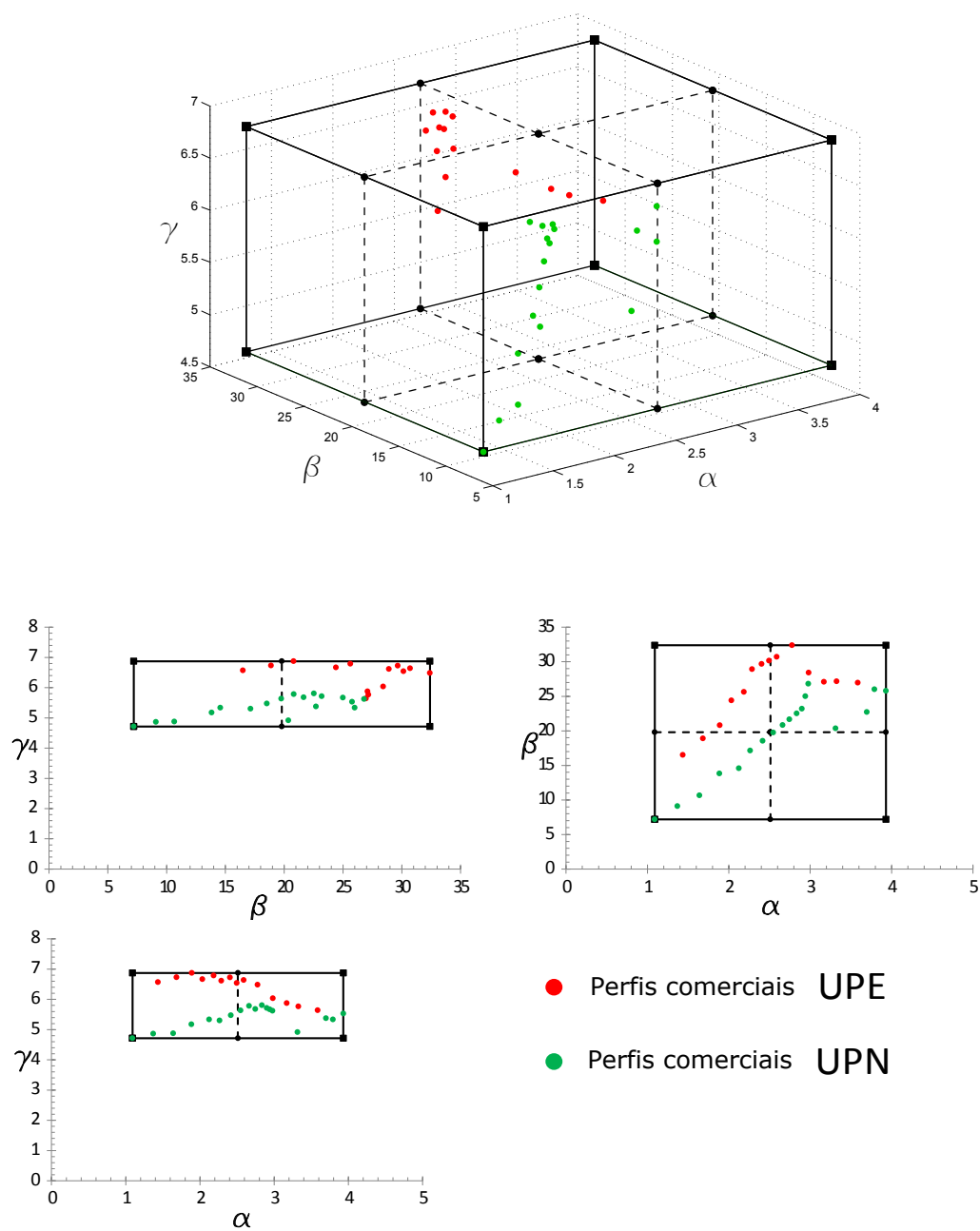


Figura 2.22: Subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.

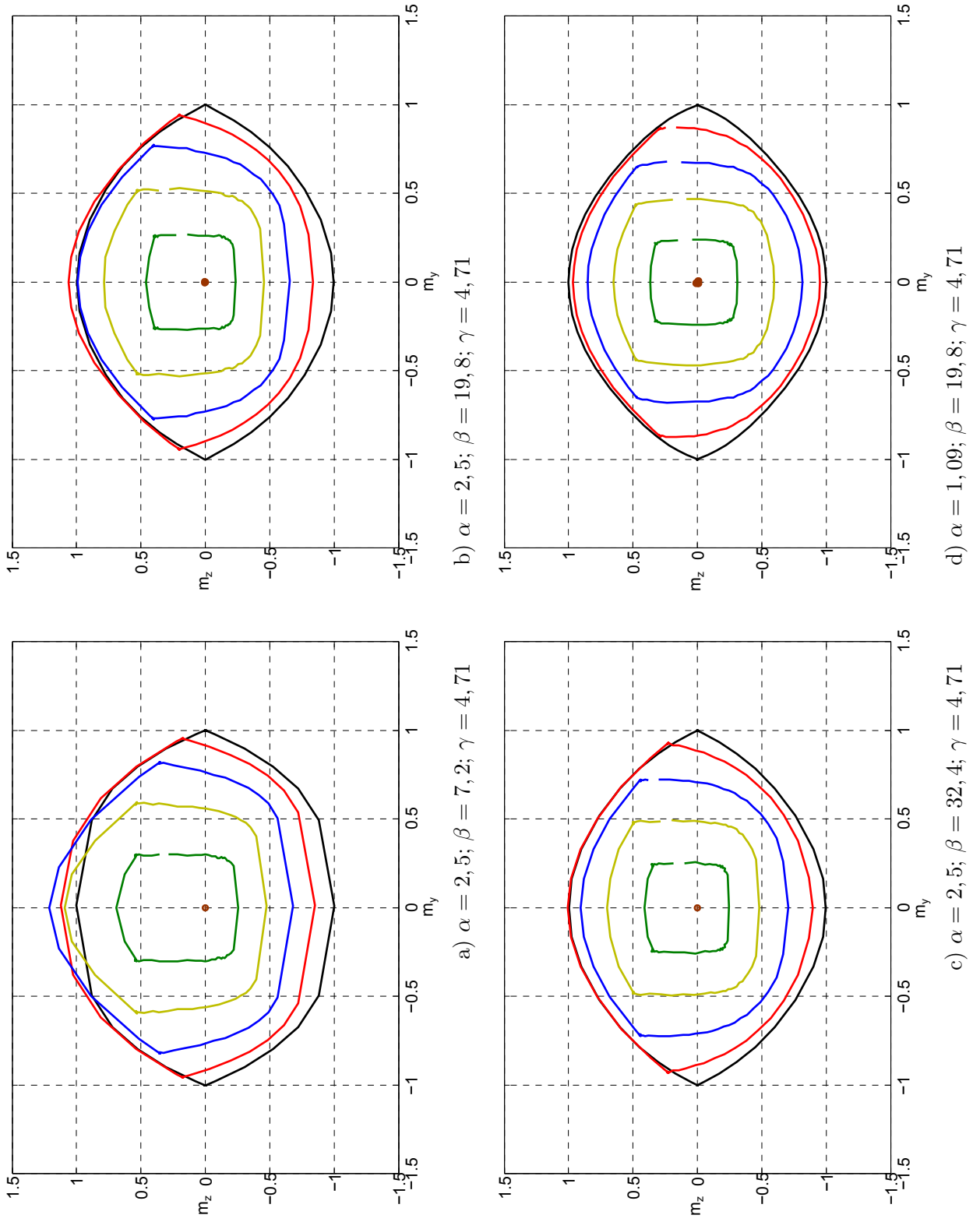
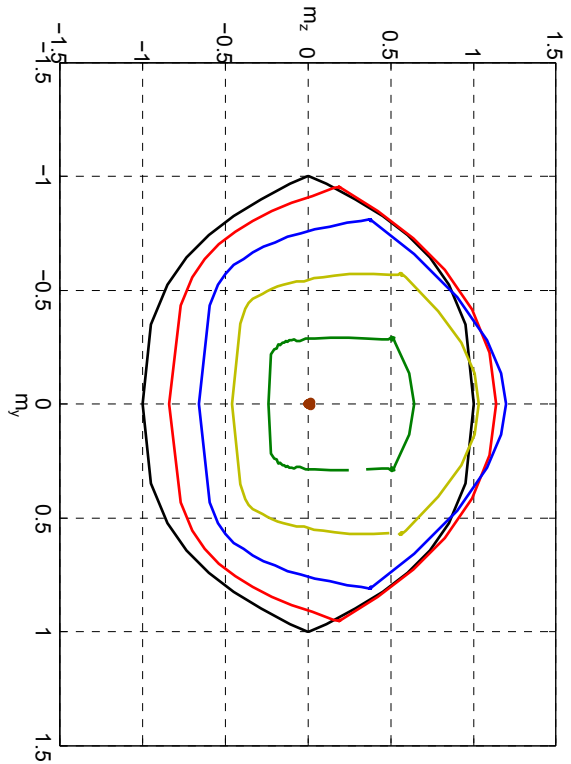
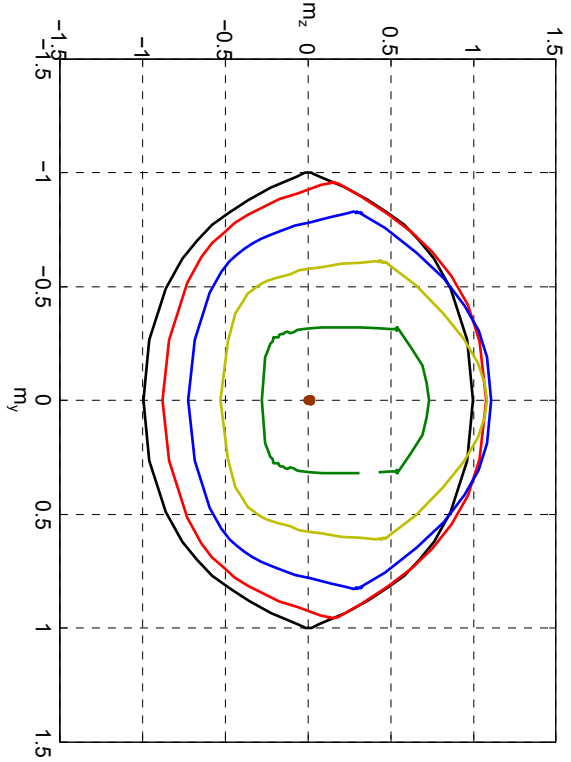


Figura 2.23: Diagramas de interação de pontos gerados após a subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.

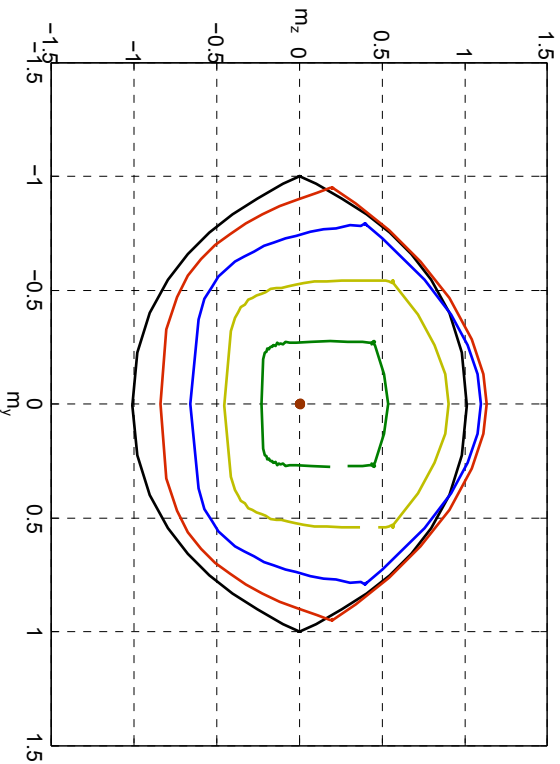
— $n = 0$ — $n = 0,2$ — $n = 0,4$ — $n = 0,6$ — $n = 0,8$ — $n = 1$



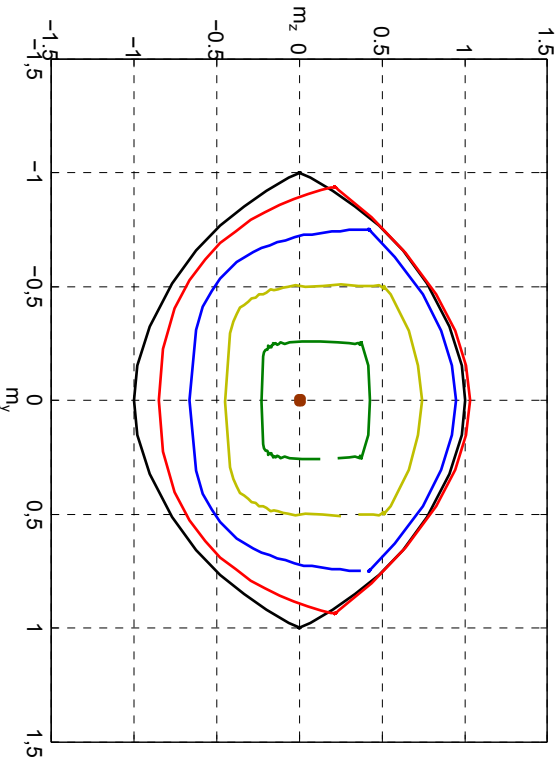
a) $\alpha = 3, 93$; $\beta = 19, 8$; $\gamma = 6, 875$



b) $\alpha = 2, 5$; $\beta = 32, 4$; $\gamma = 6, 875$



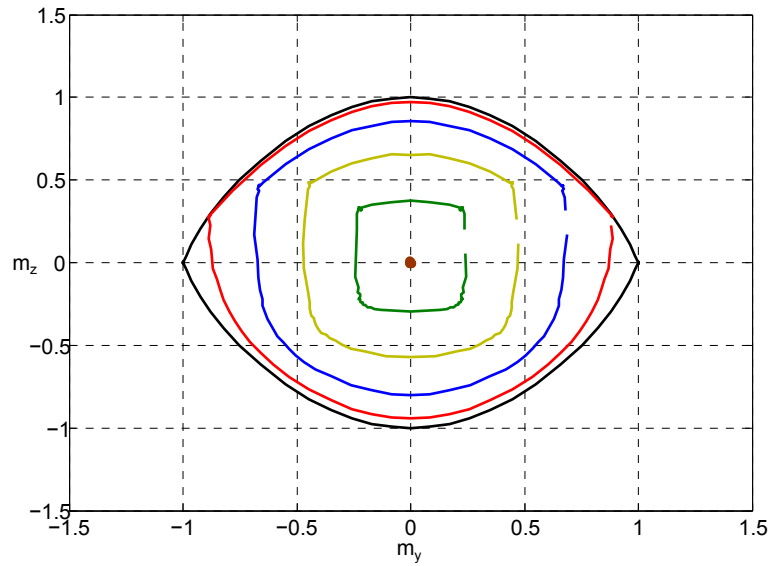
c) $\alpha = 2, 5$; $\beta = 19, 8$; $\gamma = 6, 875$



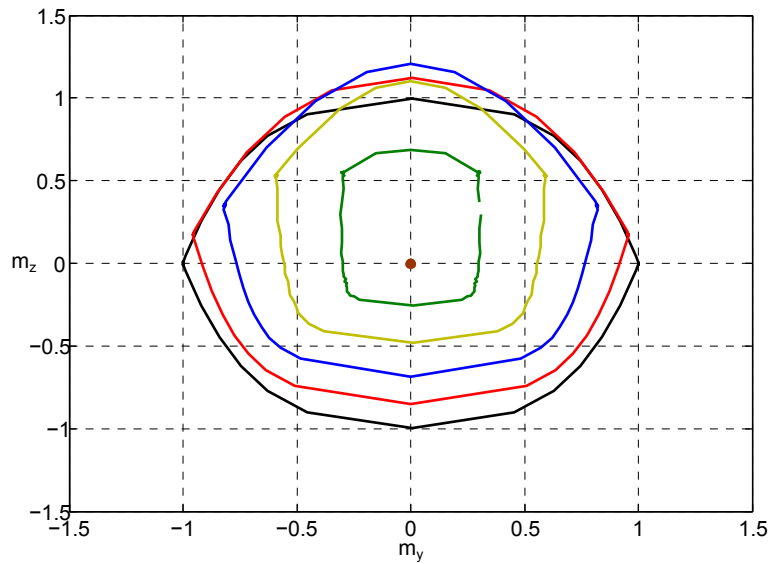
d) $\alpha = 2, 5$; $\beta = 32, 4$; $\gamma = 6, 875$

Figura 2.24: Diagramas de interação de pontos gerados após a subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.

— $n = 0$ — $n = 0,2$ — $n = 0,4$ — $n = 0,6$ — $n = 0,8$ — $n = 1$



a) $\alpha = 1,09$; $\beta = 19,8$; $\gamma = 6,875$



b) $\alpha = 3,93$; $\beta = 19,8$; $\gamma = 4,71$

Figura 2.25: Diagramas de interação de pontos gerados após a subdivisão do paralelepípedo da figura 2.19.

Capítulo 3

Resistência à torção

3.1 Introdução

Neste capítulo estuda-se a resistência plástica à torção de vigas em aço com secção em C. Considerou-se um perfil com secção em C em consola, efectuou-se o cálculo analítico do momento torsor e desenvolveu-se um modelo em elementos finitos para a determinação da carga de colapso. Por fim, através do estudo paramétrico dos resultados, obtém-se uma equação que representa uma aproximação do momento torsor real de vigas em aço com secção em C.

Tal como no Capítulo anterior, admite-se que o material é elástico-perfeitamente plástico e que é válida a hipótese dos pequenos deslocamentos.

Quando uma viga é sujeita à torção, as secções transversais rodam em torno do centro de corte e sofrem empenamento (deslocamentos longitudinais).

Caso o empenamento seja constante ao longo da viga, estamos perante torção uniforme ou torção de *Saint Venant*. Quando o empenamento é variável, estamos perante torção não-uniforme.

Torção uniforme trata-se apenas de um termo teórico uma vez que na grande maioria das aplicações práticas não existe (Šejnoha *et al.*, 2010).

No presente documento, considerou-se uma viga em consola, em que o encastramento impede todos os deslocamentos e rotações (incluindo o empenamento). Neste caso, estamos perante uma situação de torção não-uniforme. Existem assim duas componentes de torção: uma corresponde torção de *Saint Venant* T_{SV} e a outra corresponde à torção não-uniforme T_{wp} , ou seja,

$$T = T_{SV} + T_{wp}. \quad (3.1)$$

A parcela de torção uniforme é dada por

$$T_{SV} = GJ\phi', \quad (3.2)$$

em que G é o módulo de distorção, J é a constante de torção e ϕ o ângulo de torção da peça (Narayanan, *et al.*, sd.).

Na secção apenas se desenvolvem as tensões de corte τ_{xy} e τ_{xz} , sendo que as tensões correspondentes aos eixos ortogonais são nulas, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$, considerando um referencial cartesiano onde o eixo x coincide com o eixo da viga.

Para obter a parcela de torção não-uniforme, observe-se a figura 3.1 que representa um perfil com secção em I sujeito à torção pura. Como se pode observar, desenvolve-se esforço

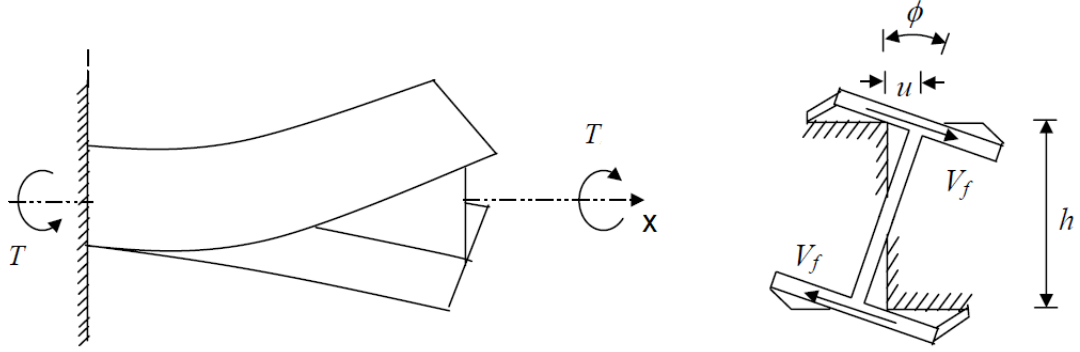


Figura 3.1: Torção não-uniforme de uma secção em I (Fonte: Naraynan, S. *et al.*, sd.).

transverso nos banzos que se relaciona com o respetivo momento através de,

$$V_f = -\frac{dM_f}{dx} \quad (3.3)$$

Note-se que os banzos fletam em sentidos opostos e que o esforço transverso V_f atua também em sentidos opostos.

Estas duas forças V_f são estaticamente equivalentes ao momento torsor

$$T_{wp} = V_f \cdot h. \quad (3.4)$$

Tendo em conta que

$$M_f = EI_f \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (3.5)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material, I_f é o momento de inércia dos banzos em relação ao eixo vertical da secção, e u é o deslocamento horizontal dos banzos, substituindo o valor de u na equação (3.5) obtém-se a expressão

$$M_f = \frac{EI_f h}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{EI_f h}{2} \phi''. \quad (3.6)$$

Substituindo na equação (3.4) a equação anterior, tem-se

$$T_{wp} = -\frac{EI_f h^2}{2} \frac{d^3 \phi}{dx^3} = -E\Gamma \phi'''. \quad (3.7)$$

A letra grega Γ representa a constante de empenamento da secção que, para secções em I, tem o valor de $\Gamma = \frac{I_f h^2}{2}$.

Assim, reunindo os resultados anteriores, obtém-se a equação diferencial da torção

$$T = GJ\phi' - E\Gamma\phi''' \quad (3.8)$$

Considerando uma situação de torção pura, a equação diferencial toma a forma

$$GJ\phi' - E\Gamma\phi''' = 0, \quad (3.9)$$

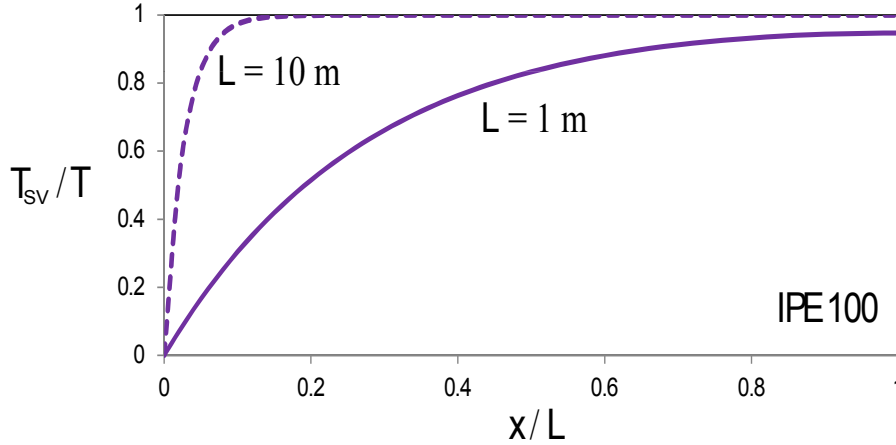


Figura 3.2: Contribuição da torção uniforme no momento torsor ao longo do eixo longitudinal de uma viga em consola (Gonçalves, 2014).

cuja a solução geral é

$$\phi = A_1 + A_2x + A_3e^{-\alpha x} + A_4e^{\alpha x}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{GJ}{EI}}. \quad (3.10)$$

Para uma consola com momento na extremidade, pode demonstrar-se que a solução é (Oden, 1981)

$$\phi = \frac{T}{\alpha GJ} [\tanh \alpha L (\cosh \alpha x - 1) - \sinh \alpha x + \alpha x]. \quad (3.11)$$

A figura 3.2 representa a contribuição da torção uniforme no momento torsor total, ao longo do eixo longitudinal de vigas em consola com um comprimento de 1 m e 10 m e uma secção transversal IPE100. Quanto maior for o vão, maior será a contribuição da torção uniforme, sendo que a torção não-uniforme apenas ocorre junto ao apoio, onde o empenamento é restringido.

As secções em C têm um único eixo de simetria, por conseguinte o seu centro de corte está localizado a uma distância e da alma. Por esta razão, uma rotação ϕ da secção em torno do centro de corte não só provoca um deslocamento dos banzos igual a $\frac{h\phi}{2}$, como também um deslocamento da alma igual a $e\phi$ (Oden, 1981). Consequentemente, desenvolvem-se momentos fletores na alma.

A equação (3.8) também se aplica a este tipo de secções, mas a constante de empenamento Γ e a constante de torção J são dadas por (Oden, 1981)

$$J = \sum_i \frac{1}{3} b_i t_i^3 = \frac{1}{3} \left[2(b - \frac{t_w}{2})t_f^3 + (h - t_f)t_w^3 \right] \quad (3.12)$$

$$\Gamma = \frac{t_f b^3 h^2}{12} \frac{2ht_w + 3bt_f}{ht_w + 6bt_f}. \quad (3.13)$$

3.2 Cálculo analítico de T_{pl}

A plastificação de um elemento sujeito à torção ocorre parte por torção uniforme e parte por torção não-uniforme.

Capítulo 3. Resistência à torção

No contexto de secções em I, Trahair e Pi (1997) obtiveram o momento torsor plástico através de

$$T_{pl} = T_{pl,SV} + T_{pl,wp}, \quad (3.14)$$

em que $T_{pl,SV}$ e $T_{pl,wp}$ são os momentos torsores plásticos para a torção uniforme e não-uniforme, respetivamente. Os autores determinaram $T_{pl,SV}$ através da expressão proveniente da analogia do monte de areia (*sand heap analogy*),

$$T_{pl,SV} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \sum \frac{bt^2}{2} \quad (3.15)$$

sendo que b e t correspondem ao comprimento e espessura de cada elemento retangular da secção, respetivamente. O valor de $T_{pl,wp}$ é determinado através da expressão (3.4).

Apesar de esta aproximação não ser rigorosa, após uma comparação com dados numéricos e experimentais, os autores consideram-na conservativa.

Nas secções seguintes calculam-se os valores de $T_{pl,SV}$ e $T_{pl,wp}$ para secções em C, com o fim de serem posteriormente comparados com os resultados obtidos pelo programa de elementos finitos ADINA.

3.2.1 Momento torsor plástico para torção uniforme

De acordo com a teoria clássica de vigas (Lubliner, 1990), o momento plástico para torção uniforme de uma parede de largura b e espessura t é

$$T_{pl,SV} = \frac{\sigma_y}{6\sqrt{3}} t_i^2 (3b_i - t_i). \quad (3.16)$$

Neste trabalho considerou-se que o momento torsor plástico para torção uniforme de um perfil de secção em C resulta do somatório do momento torsor plástico para cada uma das três paredes constituintes. Assim, considerando a secção da figura 3.3 obtém-se a expressão

$$T_{pl,SV} = \frac{\sigma_y}{6\sqrt{3}} (t_w^2 (3(H - 2t_f) - t_w) + 2 \times (t_f^2 (3b - t_f))). \quad (3.17)$$

É de notar que a fórmula não depende do comprimento do perfil metálico, apenas da largura e da espessura dos banzos e da alma.

3.2.2 Momento torsor plástico para torção não-uniforme

Na figura 3.4 estão representados os esforços que se desenvolvem nas paredes de uma secção em C sujeita à torção. Assumiu-se que os esforços no encastramento consistem nos esforços plásticos da secção, através dos quais é determinado o momento torsor plástico para torção não-uniforme.

De acordo com a assunção mencionada é possível calcular o momento atuante na alma e o esforço axial atuante nos banzos da secção, ou seja

$$M_{pl,w} = \frac{\sigma_y h^2}{4} t_w \quad (3.18)$$

$$N_{pl,f} = \frac{M_{pl,w}}{h} \leftrightarrow N_{pl,f} = \frac{\sigma_y h}{t_w} 4 \quad (3.19)$$

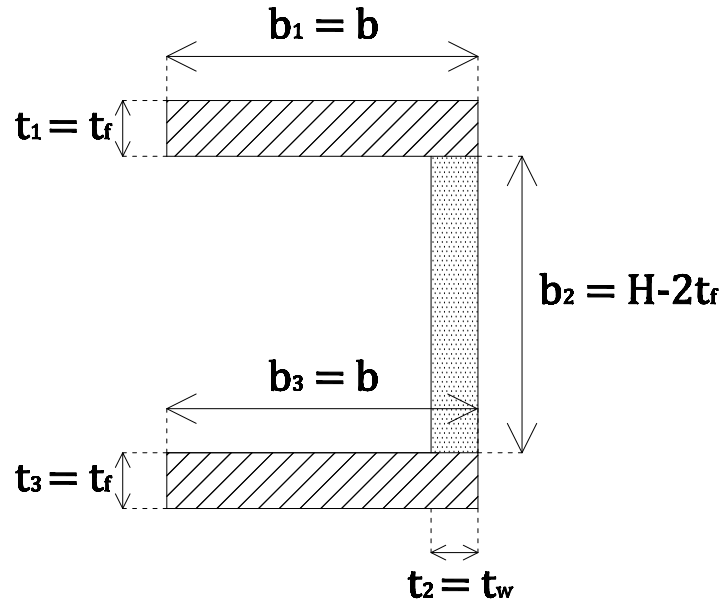


Figura 3.3: Divisão da secção em C em retângulos para determinação de $T_{pl,SV}$.

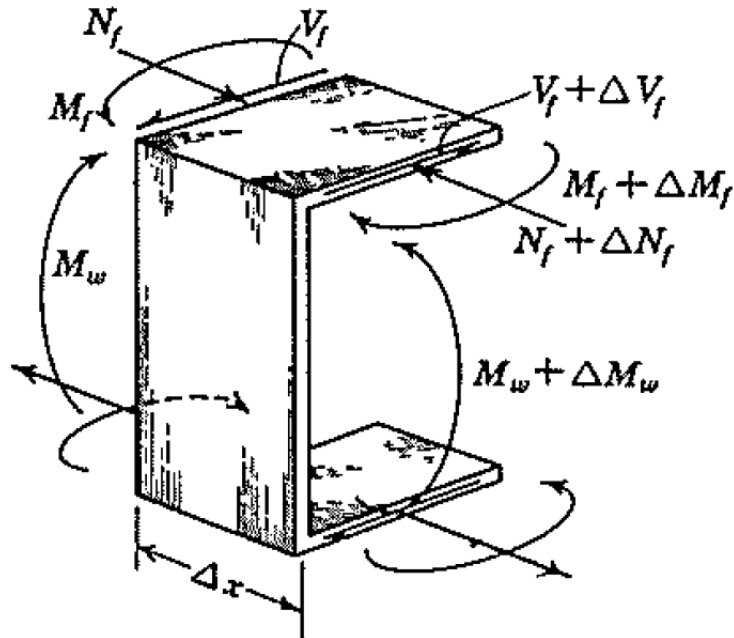


Figura 3.4: Esforços nas paredes de uma secção em C sujeita à torção não-uniforme (Oden, 1981).

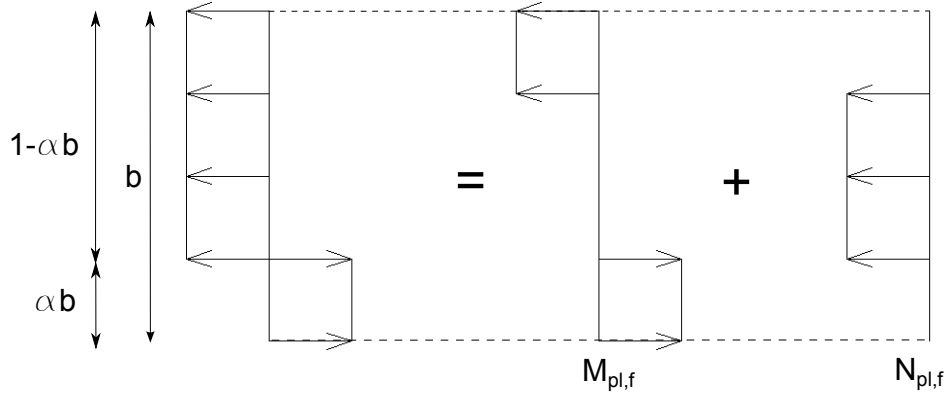


Figura 3.5: Decomposição dos esforços plásticos nos banzos.

sendo que σ_y corresponde à tensão de cedência da secção.

Resultado do facto de este tipo de secções não ser simétrica em relação ao eixo vertical, a parcela dos banzos que se encontra comprimida é diferente da parcela tracionada.

A figura 3.5 representa as tensões atuantes nos banzos sendo que o esforço axial nos banzos pode também ser escrito da seguinte forma

$$N_{pl,f} = (b - 2\alpha b)\sigma_y t_f \leftrightarrow N_{pl,f} = \sigma_y b(1 - 2\alpha)t_f. \quad (3.20)$$

Assim, igualando as equações (3.19) e (3.20), obtém-se o valor de α ,

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{H t_w}{8b t_f}. \quad (3.21)$$

Conhecido o valor de α é então possível determinar o valor do momento plástico atuante nos banzos, ou seja

$$M_{pl,f} = \alpha b^2 \sigma_y (1 - \alpha) t_f. \quad (3.22)$$

A figura 3.6 representa os esforços nas paredes de uma viga em consola com secção em C e o diagrama de corpo livre de cada parede da secção. Por equilíbrio global pode escrever-se

$$M_{pl,f} = V_f L \quad \text{e} \quad T_{pl,wp} = V_f H \quad (3.23)$$

em que V_f é o esforço transversal nos banzos, L é o comprimento da viga e H a altura da secção. Considerando as equações anteriores

$$T_{pl,wp} = \frac{M_{pl,f}}{L} H. \quad (3.24)$$

Substituindo a equação (3.22) na equação acima obtém-se finalmente

$$T_{pl,wp} = \frac{t_f \alpha b^2 \sigma_y (1 - \alpha)}{L} H \quad (3.25)$$

e, como se pode observar, depende do comprimento do perfil.

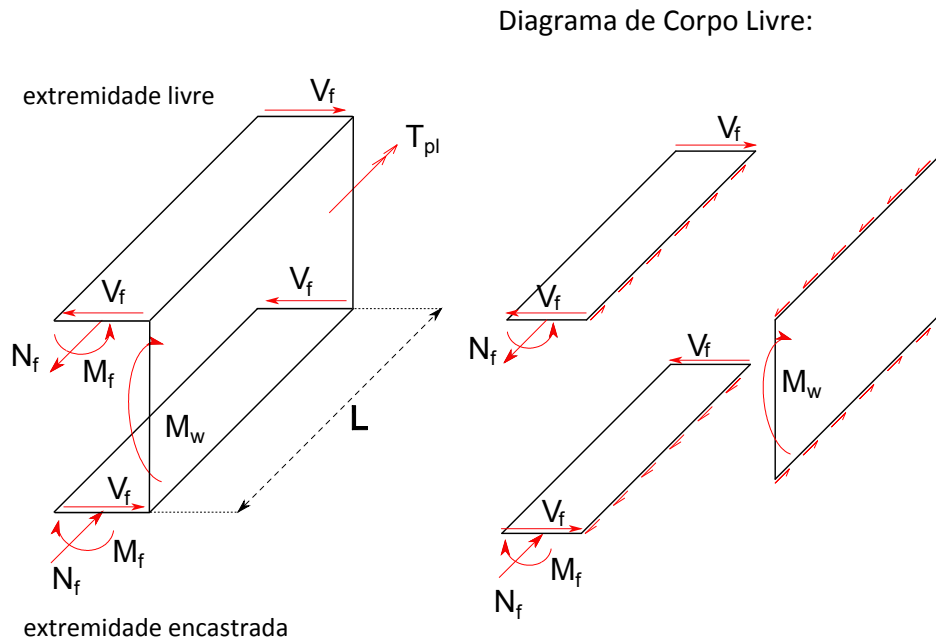


Figura 3.6: Esforços nas paredes de uma viga em consola com secção em C e diagrama de corpo livre das mesmas.

3.3 Estudo paramétrico

Efetuuou-se um estudo paramétrico onde se comparam os resultados obtidos com o cálculo analítico do momento torsor plástico para torção uniforme e não-uniforme com o cálculo com elementos finitos. Foram considerados três perfis - UPN 100, UPN 50 e UPE 200, e para cada secção foram considerados diferentes comprimentos de viga.

Para o efeito, consideraram-se as seguintes propriedades do material:

- **Módulo de Young:** $E = 210 \text{ GPa}$
- **Coefficiente de Poisson:** $\nu = 0,3$
- **Tensão de Cedência:** $\sigma_y = 300 \text{ MPa}$

Na presente secção expõem-se os resultados obtidos e o estudo paramétrico dos mesmos.

3.3.1 Cálculo com elementos finitos de casca

Com o objetivo de determinar a carga de colapso de cada perfil, formulou-se um modelo em elementos finitos de casca no *software* ADINA.

A figura 3.7 representa o modelo formulado. Como se pode observar, as condições de fronteira foram aplicadas numa das extremidades da viga e, tratando-se de um encastramento, foram impedidos os movimentos de rotação e translação. O carregamento consiste em duas forças iguais no plano da secção transversal, paralelas e de sentido oposto. As forças foram

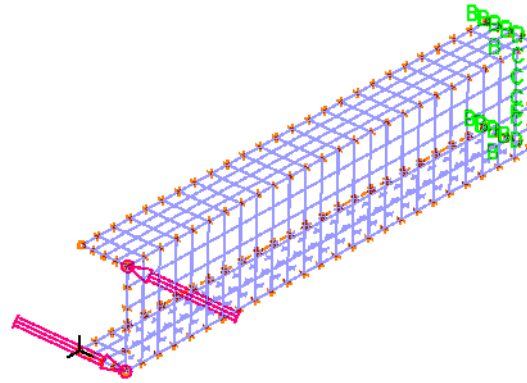


Figura 3.7: Modelo de elementos finitos de casca.

aplicadas na extremidade livre do perfil, nos pontos de ligação da alma com os banzos. Gerou-se uma malha de elementos finitos de casca de quatro nós e considerou-se integração pela espessura da casca trapezoidal de ordem 10. Relativamente ao material, este foi definido como elástico-perfeitamente plástico.

3.3.2 Comparação de resultados

Os valores obtidos estão apresentados nas tabelas 3.1, 3.2, 3.3.

Tabela 3.1: Valores de momento torsor plástico para torção uniforme das diferentes secções em C.

	$T_{pl,SV}$ (kNm)
Perfil UPN 100	0,8958
Perfil UPN 50	0,4073
Perfil UPE 200	2,2171

Nos gráficos 3.8, 3.9 e 3.10 são comparados os resultados obtidos para as secções UPN100, UPN50 e UPE200 respetivamente.

Tabela 3.2: Valores de momento torsor para torção não-uniforme das diferentes secções em C.

	$T_{pl,wp}$ (kNm)		
L (mm)	UPN 100	UPN 50	UPN 200
200	0,6976	0,1791	4,6664
300	0,4651	0,1194	3,1109
400	0,3488	0,0895	2,3334
500	0,2790	0,0716	1,8665
600	0,2325	0,0597	1,5555
700	0,1993	0,0512	1,3332
1000	0,1395	0,0358	0,9333
1500	0,0930	0,0239	0,6222

Tabela 3.3: Valores da carga de colapso das diferentes secções em C, obtidas pelo *software* ADINA.

L (mm)	$T_{pl,ADINA}$ (kNm)		
	UPN 100	UPN 50	UPE 200
200	1,9880	0,6000	5,4240
300	1,5750	0,5300	5,4240
400	1,3970	0,4938	5,7760
500	1,2750	0,4750	4,9500
600	1,2120	0,4625	4,4500
700	1,1500	0,4563	4,1000
1000	1,0750	0,4438	3,4760
1500	1,0000	0,4313	3,0000

Quando comparado com os gráficos 3.8 e 3.9, o gráfico 3.10 apresenta uma irregularidade nos resultados devolvidos pelo ADINA. Para os dois primeiros comprimentos de viga considerados ($L = 200$ mm e $L = 300$ mm), o perfil, cuja secção tem 200 mm de altura, trata-se de uma peça pouco esbelta e, por conseguinte, não linear. Assim sendo, a irregularidade referida não foi considerada relevante.

Verifica-se também que quanto maior é o comprimento da viga, a plastificação por torção ocorre maioritariamente por torção uniforme, facto que verifica a figura 3.2 (*vide* secção 3.1).

No entanto, não é possível considerar que a fórmula analítica do momento torsor plástico para torção uniforme seja uma aproximação satisfatória da carga de colapso, uma vez que para comprimentos de viga menores os resultados apresentam uma discrepância significativa.

Como se pode observar nos gráficos 3.8, 3.9 e 3.10, a soma algébrica dos momentos torsores plásticos uniforme e não-uniforme traduz uma aproximação do valor da carga de colapso satisfatória e conservativa. Verifica-se então que o método desenvolvido por Trahair e Pi (1997) para secções em I é aplicável a secções em C.

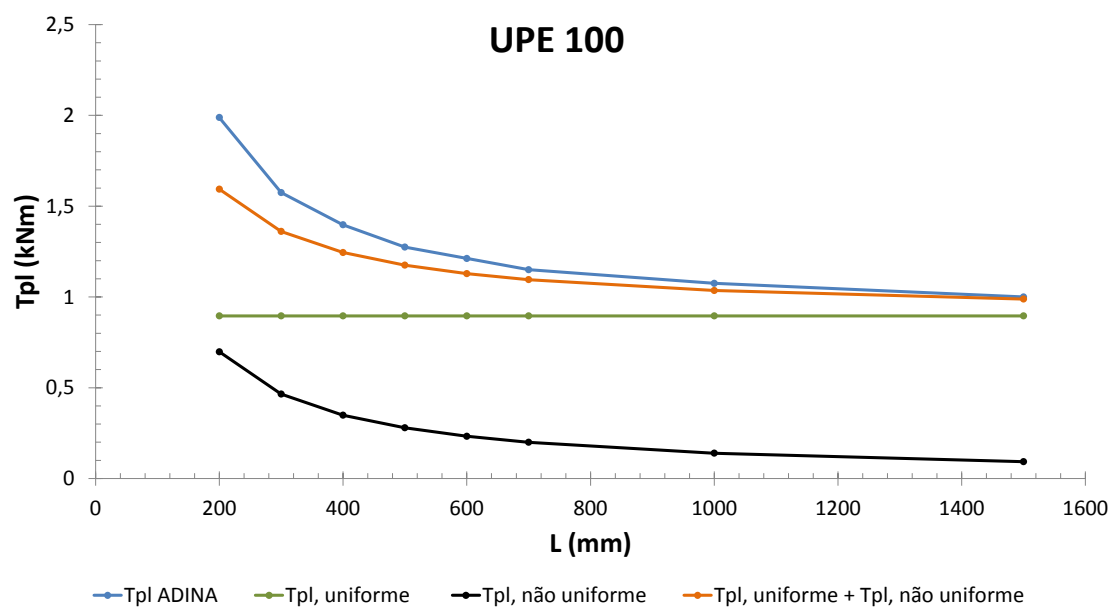


Figura 3.8: Torção plástica num perfil UPN 100, em consola.

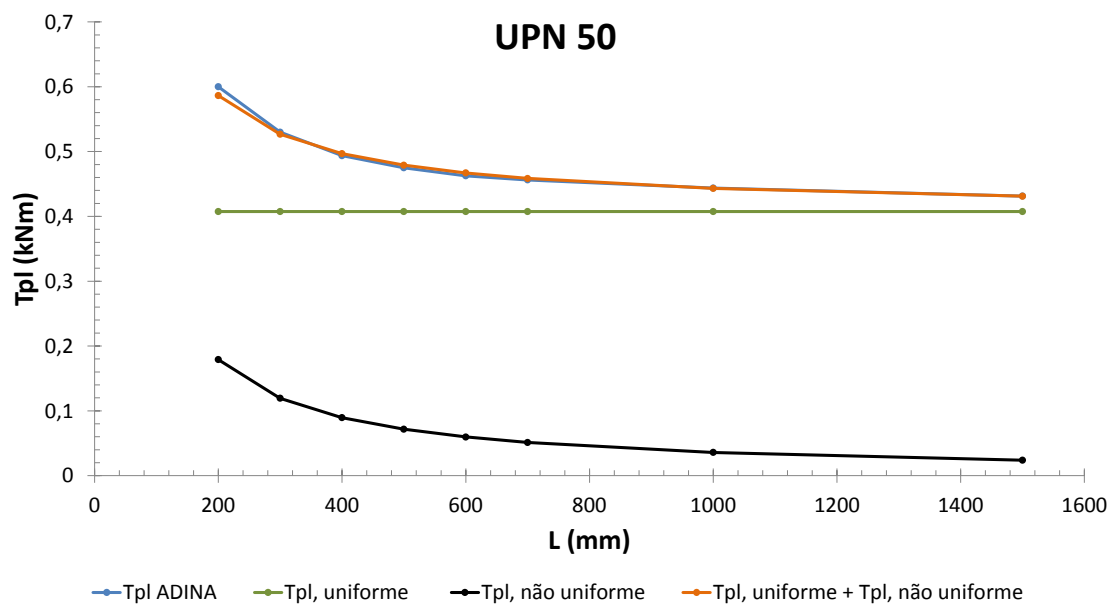


Figura 3.9: Torção plástica num perfil UPN 50, em consola.

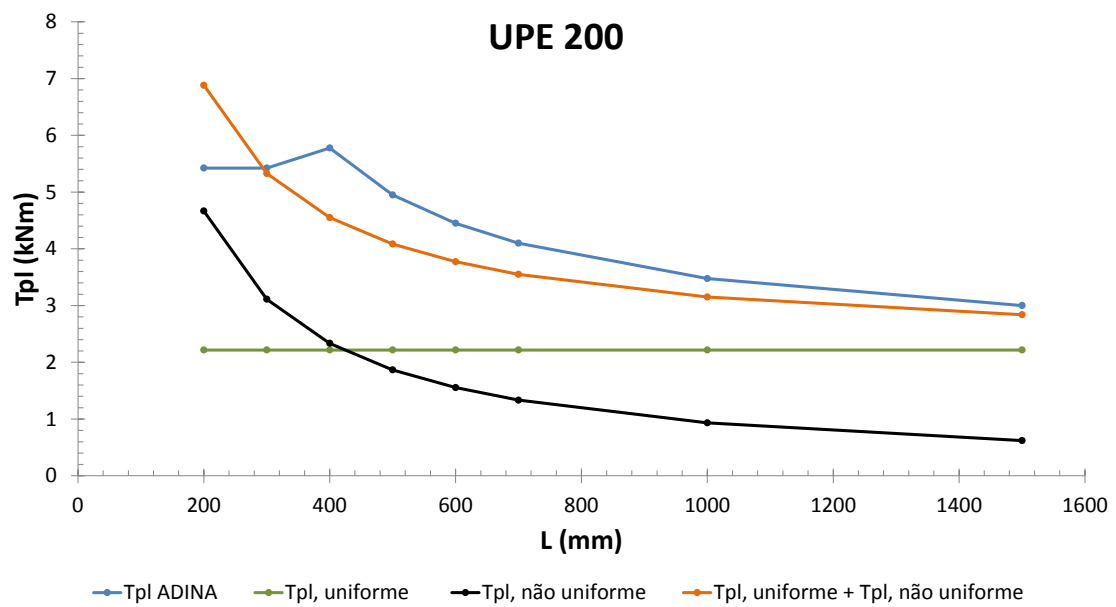


Figura 3.10: Torção plástica num perfil UPE 200, em consola.

Capítulo 4

Conclusões e desenvolvimentos futuros

4.1 Conclusões

Na presente dissertação estudou-se o comportamento de secções de aço em C sujeitas a flexão composta desviada e a torção com empenamento restringido. Tendo em conta os objetivos definidos (*vide* secção 1.2), pode-se concluir que estes foram atingidos.

Relativamente ao estudo da flexão composta desviada, concluiu-se o seguinte:

- Os resultados obtidos por Chen e Atsuta (1977) foram reproduzidos, o que permitiu validar o programa de cálculo em MATLAB. No entanto, a assunção feita pelos autores de que as curvas de interação da secção C 10x20 são representativas de toda a gama de secções em C não se verifica.
- Em secções mono-simétricas, ocorre um aumento do momento resistente com o aumento do esforço axial. Este fenómeno deve-se ao facto de que, nestas secções, as posições da linha neutra plástica e do baricentro da secção não coincidem.
- A equação do EC3 para verificação da resistência à flexão composta desviada de secções em I não fornece resultados satisfatórios quando aplicada a secções em C. Assim, não deve ser considerada para efeitos de verificação de segurança deste tipo de secções.
- A equação desenvolvida por Kitipornchai *et al.* (1991) não depende das dimensões da secção, assim sendo, apenas traduz uma boa aproximação das curvas de interação da secção C10x20.
- Os parâmetros geométricos de uma secção em C têm influência nas curvas de interação da mesma. A esbelteza dos banzos (γ) não provoca alterações significativas nos resultados, pelo que este parâmetro geométrico não é considerado nos ábacos propostos.

Relativamente ao estudo da torção plástica com empenamento restringido, concluiu-se que:

- O método desenvolvido por Trahair e Pi (1997) para secções em I, que consiste na soma algébrica dos valores do momento torsor plástico para torção uniforme ($T_{pl,SV}$) e não-uniforme ($T_{pl,wp}$) para a determinação da carga de colapso, é verificado para secções em C.

4.2 Desenvolvimentos futuros

Face ao trabalho desenvolvido e expresso no presente documento, considera-se haver margem para aprofundar a matéria tratada, nomeadamente nos seguintes aspetos:

- Com base nos ábacos apresentados, teria interesse o desenvolvimento de uma equação que represente aproximada e conservativamente as curvas de interação de uma secção em C.
- Apesar da soma algébrica dos valores de momento torsor para torção uniforme e não-uniforme ter sido considerada bastante satisfatória na obtenção da resistência de uma secção em C à torção com empenamento restringido, é fundamental um estudo aprofundado com o fim de justificar este método.
- Com o objetivo de colmatar totalmente a lacuna existente nas normas de verificação de segurança de perfis de aço com secção em C, seria indispensável o estudo do comportamento a outros tipos de carregamento, como por exemplo a flexão com esforço transversal e a interação flexão-torção e respetivos fenómenos de encurvadura.

Bibliografia

- Adina R & D, Inc - 2013 - *ADINA AUT 8.7.2 900 nodes version* - Alemanha
- Almeida, J. R. - 2007 - *Estruturas em Aço* – Apontamentos das Aulas - Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa – Lisboa, Portugal.
- ArcelorMittal - sd. - *Sections and Merchant Bars, Sales Programme* - Long Carbon Europe - págs. 96-99.
- Baba, S. e Kajita, T. - 1982 - *Plastic Analysis of Torsion of a Prismatic Beam* – International Journal for Numerical Methods in Engineering, Volume 18, págs. 927-944.
- Bathe, K.J. e Winer, P.M. - 1983 - *On Elastic-Plastic Analysis of I-beams in Bending and Torsion* – Computers & Structures, Volume 17, nº5-6, págs. 711-718.
- Chen, G. e Trahair, N. S. - 1992 - *Inelastic Nonuniform Torsion of Steel I-Beams* – J. Construct. Steel Research, Volume 23, págs 189–207.
- Chen, W. e Atsuta, T. - 1977 - *Theory of Beam-Columns, Volume 2 – Space Behaviour and Design* – Nova York – McGraw-Hill, Chapter 5.
- Comité Européen de Normalização (CEN) - 2005 - *Eurocode 3:Design of Steel Structures, Part 1- 1: General Rules and Rules for Buildings* - Belgica, Bruxelas.
- Gonçalves, R. - 2014 - *Lajes e Cascas* - Apontamentos das Aulas - Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa – Lisboa, Portugal.
- Hang, K.C. - 2002 - *A Unified Approach for Steel and Composite Beams with Web Openings* – Tese de Mestrado – The Hong Kong Polytechnic University – Hong Kong , China.
- Kitipornchai, S., Zhu, K., Xiang, Y., Al-Bermani, F.G.A. - 1991 - *Single-equation yield surfaces for monosymmetric and asymmetric sections* – Engineering Structures, Volume 13, págs. 366-370.
- Lubliner, J. - 1990 - *Plasticity Theory* - Nova York - Macmillan
- Narayanan, R., Kalyanaraman, V., Santhakumar, A.R., Seetharaman, S., Satish Kumar, S.R., Arul Jayachandran, S., Senthil, R. - s.d. - *Beams Subjected to Torsion and Bending – I, Chapter 17* – Teaching Material – Institute for Steel Development & Growth. – Bhawanipur Kolkata, Índia.
- Oden, J. T. - 1981 - *Mechanics of Elastic Structures* – Nova York – McGraw-Hill Book Company, Chapter 7.

Bibliografia

- Rodrigues, C.C. – 2007 - *Resistência de Materiais II, Módulo 3 - Torção* – Apontamentos das Aulas – Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa – Lisboa, Portugal.
- Salençon, J. – 2000 - *Handbook of continuum mechanics, General concepts, Theroelasticity* – Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, págs. 450.
- Šejnoah, M., Šejnoah, J. Bittnarová, J. – 2010 - *The Theory of Elasticity* – Apontamentos das aulas – Czech Technical University in Prague – Praga – República Checa.
- Snijder, H.H., Hoenderkamp, J.C.D, Bakker, M.C.M., Steenbergen, H.M.G.M., Louw, C.H.M.,
- 2008 - *Design rules for lateral torsional buckling of channel sections subject to web loading*
- Ernst & Sohn, Volume , págs. 247-256.
- The Mathworks Inc. - 2011 - *MATLAB R2011b* - Massachusetts, Estados Unidos da América
- Trahair, N. S. e PI, Y-L. – 1997 - *Torsion, bending and buckling of steel beams* – Engineering Structures, Volume 19, nº5, págs. 372-377.

Anexo A

Ábacos para a flexão composta desviada

O presente anexo contém ábacos para determinação da resistência à flexão composta desviada.

Na secção A.1 encontra-se uma tabela com as dimensões das secções dos perfis comerciais UPN e UPE e os respectivos parâmetros geométricos.

Na secção A.2 apresentam-se os ábacos para a determinação da resistência à flexão composta desviada.

A.1 Tabela de perfis comerciais UPN e UPE e respectivos parâmetros geométricos

Na tabela apresentada nesta secção, apresentam-se as dimensões das secções dos perfis comerciais UPE e UPN e os respectivos parâmetros geométricos.

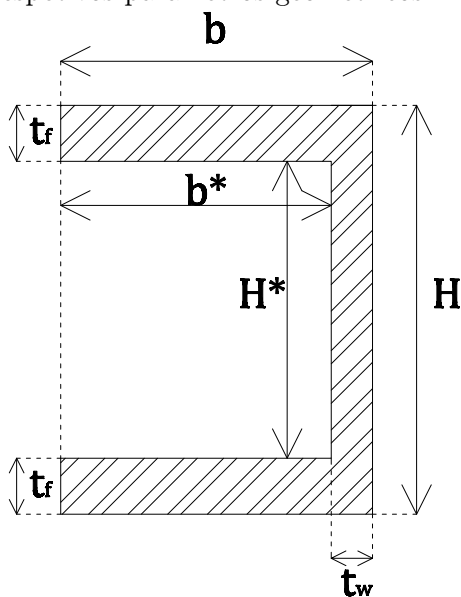


Figura A.1: Dimensões de uma secção em C.

Anexo A. Ábacos para a flexão composta desviada

Tabela A.1: Tabela de perfis comerciais UPN e UPE e respectivos parâmetros geométricos, adaptado das tabelas de perfis de ArcelorMittal.

Perfil	H (mm)	b (mm)	tw (mm)	tf (mm)	H* (mm)	b* (mm)	α	β	γ
UPE 80	80	50	4	7	66	46	1,43	16,50	6,57
UPE 100	100	55	4,5	7,5	85	50,5	1,68	18,89	6,73
UPE 120	120	60	5	8	104	55	1,89	20,80	6,88
UPE 140	140	65	5	9	122	60	2,03	24,40	6,67
UPE 160	160	70	5,5	9,5	141	64,5	2,19	25,64	6,79
UPE 180	180	75	5,5	10,5	159	69,5	2,29	28,91	6,62
UPE 200	200	80	6	11	178	74	2,41	29,67	6,73
UPE 220	220	85	6,5	12	196	78,5	2,50	30,15	6,54
UPE 240	240	90	7	12,5	215	83	2,59	30,71	6,64
UPE 270	270	95	7,5	13,5	243	87,5	2,78	32,40	6,48
UPE 300	300	100	9,5	15	270	90,5	2,98	28,42	6,03
UPE 330	330	105	11	16	298	94	3,17	27,09	5,88
UPE 360	360	110	12	17	326	98	3,33	27,17	5,76
UPE 400	400	115	13,5	18	364	101,5	3,59	26,96	5,64
Perfil	H (mm)	b (mm)	tw (mm)	tf (mm)	H* (mm)	b* (mm)	α	β	γ
UPN 50	50	38	5	7	36	33	1,09	7,20	4,71
UPN 65	65	42	5,5	7,5	50	36,5	1,37	9,09	4,87
UPN 80	80	45	6	8	64	39	1,64	10,67	4,88
UPN 100	100	50	6	8,5	83	44	1,89	13,83	5,18
UPN 120	120	55	7	9	102	48	2,13	14,57	5,33
UPN 140	140	60	7	10	120	53	2,26	17,14	5,30
UPN 160	160	65	7,5	10,5	139	57,5	2,42	18,53	5,48
UPN 180	180	70	8	11	158	62	2,55	19,75	5,64
UPN 200	200	75	8,5	11,5	177	66,5	2,66	20,82	5,78
UPN 220	220	80	9	12,5	195	71	2,75	21,67	5,68
UPN 240	240	85	9,5	13	214	75,5	2,83	22,53	5,81
UPN 260	260	90	10	14	232	80	2,90	23,20	5,71
UPN 280	280	95	10	15	250	85	2,94	25,00	5,67
UPN 300	300	100	10	16	268	90	2,98	26,80	5,63
UPN 320	320	100	14	17,5	285	86	3,31	20,36	4,91
UPN 350	350	100	14	16	318	86	3,70	22,71	5,38
UPN 380	380	102	13,5	16	348	88,5	3,93	25,78	5,53
UPN 400	400	110	14	18	364	96	3,79	26,00	5,33

$$\alpha = \frac{H^*}{b^*} \quad \beta = \frac{H^*}{t_w} \quad \gamma = \frac{b^*}{t_f} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Ábacos para a determinação de resistência à flexão composta desviada

Tendo em conta os valores dos parâmetros geométricos da secção em análise, na tabela A.2 obtém-se a figura que corresponde ao ábaco pretendido. Caso os valores da secção não sejam os tabelados, propõe-se uma interpolação dos valores dos gráficos correspondentes.

Tabela A.2: Parâmetros geométricos.

Parâmetros	$\alpha = 1,09$	$\alpha = 2,5$	$\alpha = 3,93$
$\beta = 7,2$	A.2	A.8	A.5
$\beta = 19,8$	A.3	A.6	A.9
$\beta = 32,4$	A.4	A.7	A.10

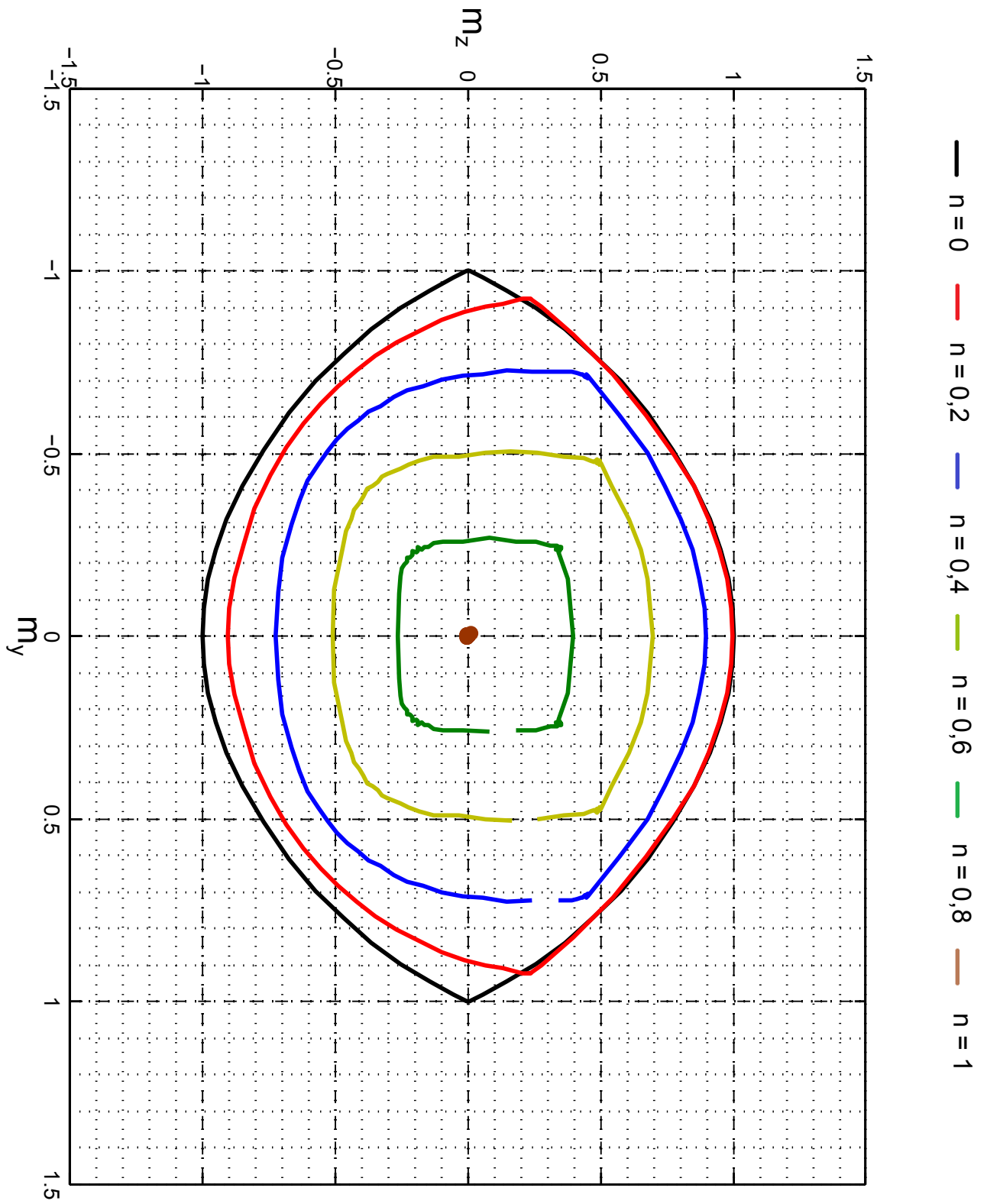


Figura A.2: $\alpha = 1,09$ e $\beta = 7,2$

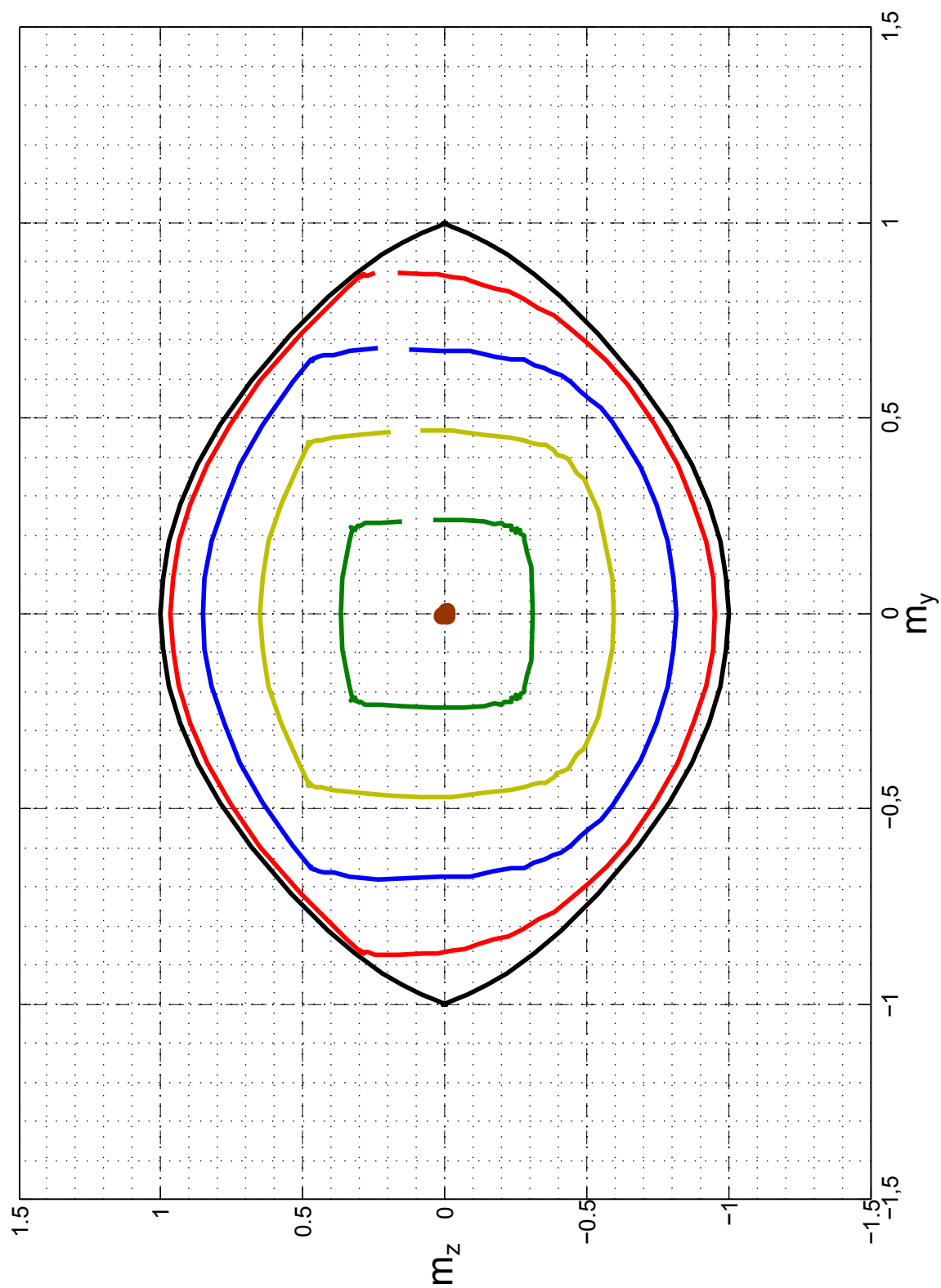


Figura A.3: $\alpha = 1,09$ e $\beta = 19,8$

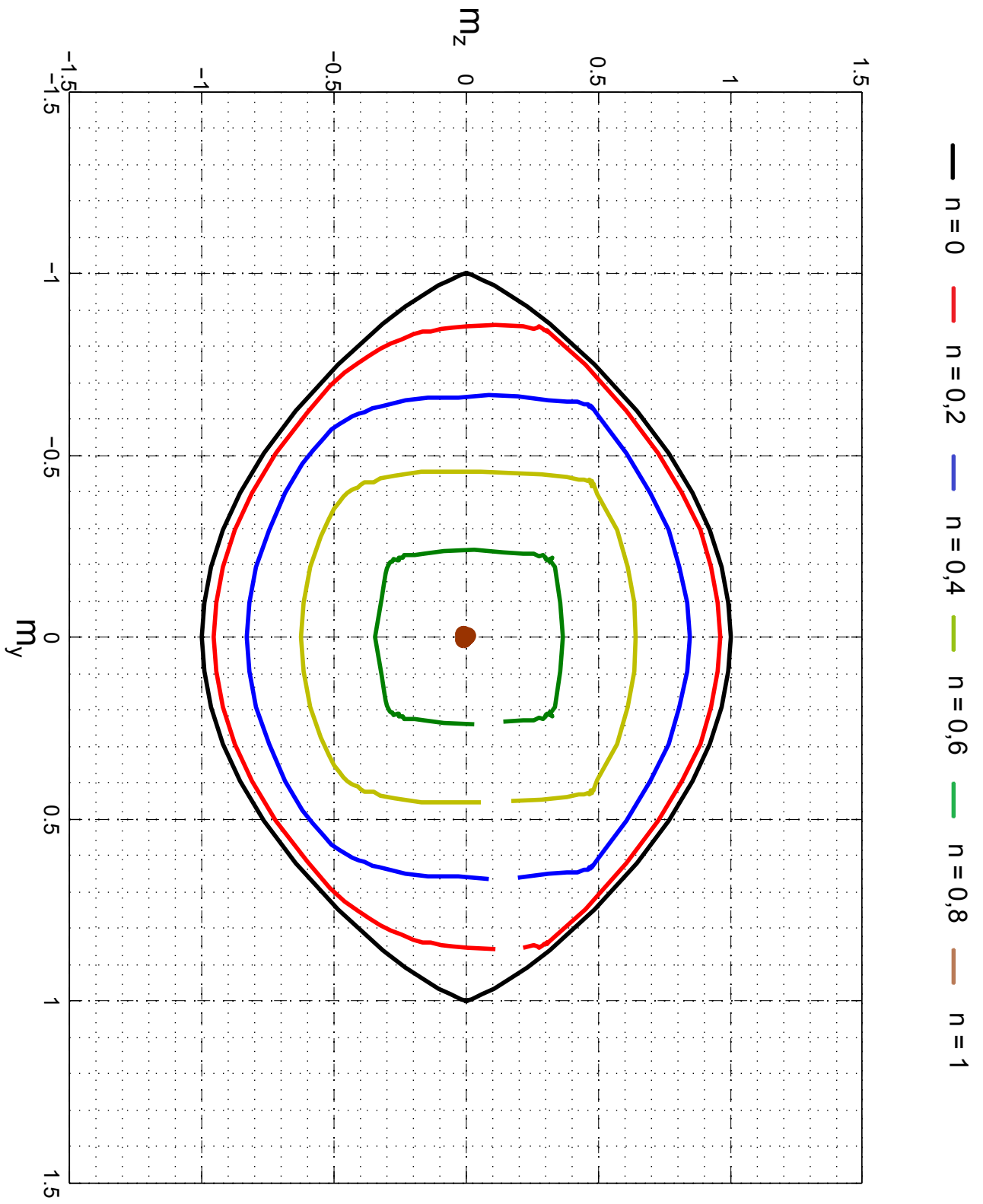


Figura A.4: $\alpha = 1,09$ e $\beta = 32,4$

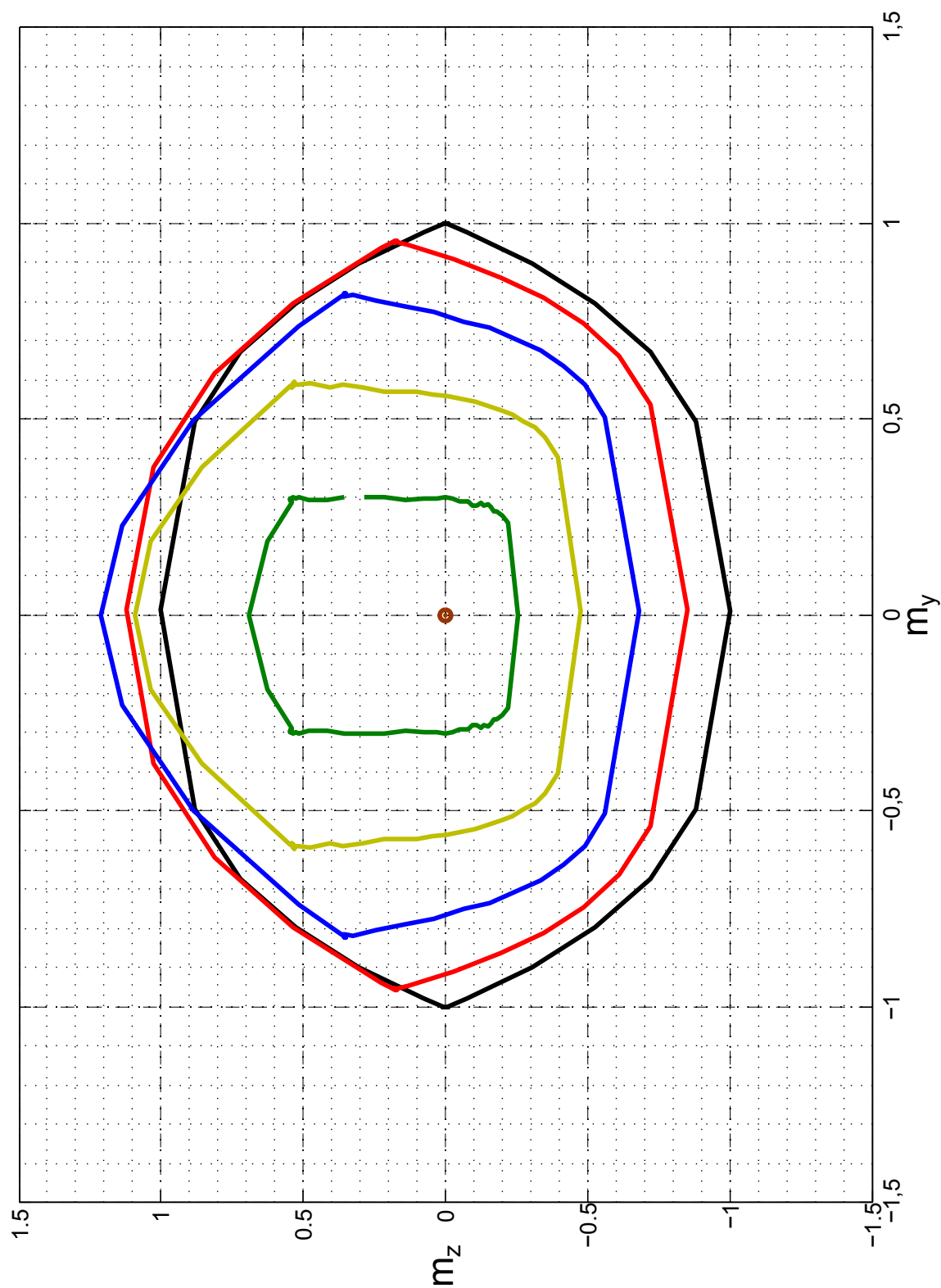


Figura A.5: $\alpha = 3,93$ e $\beta = 7,2$

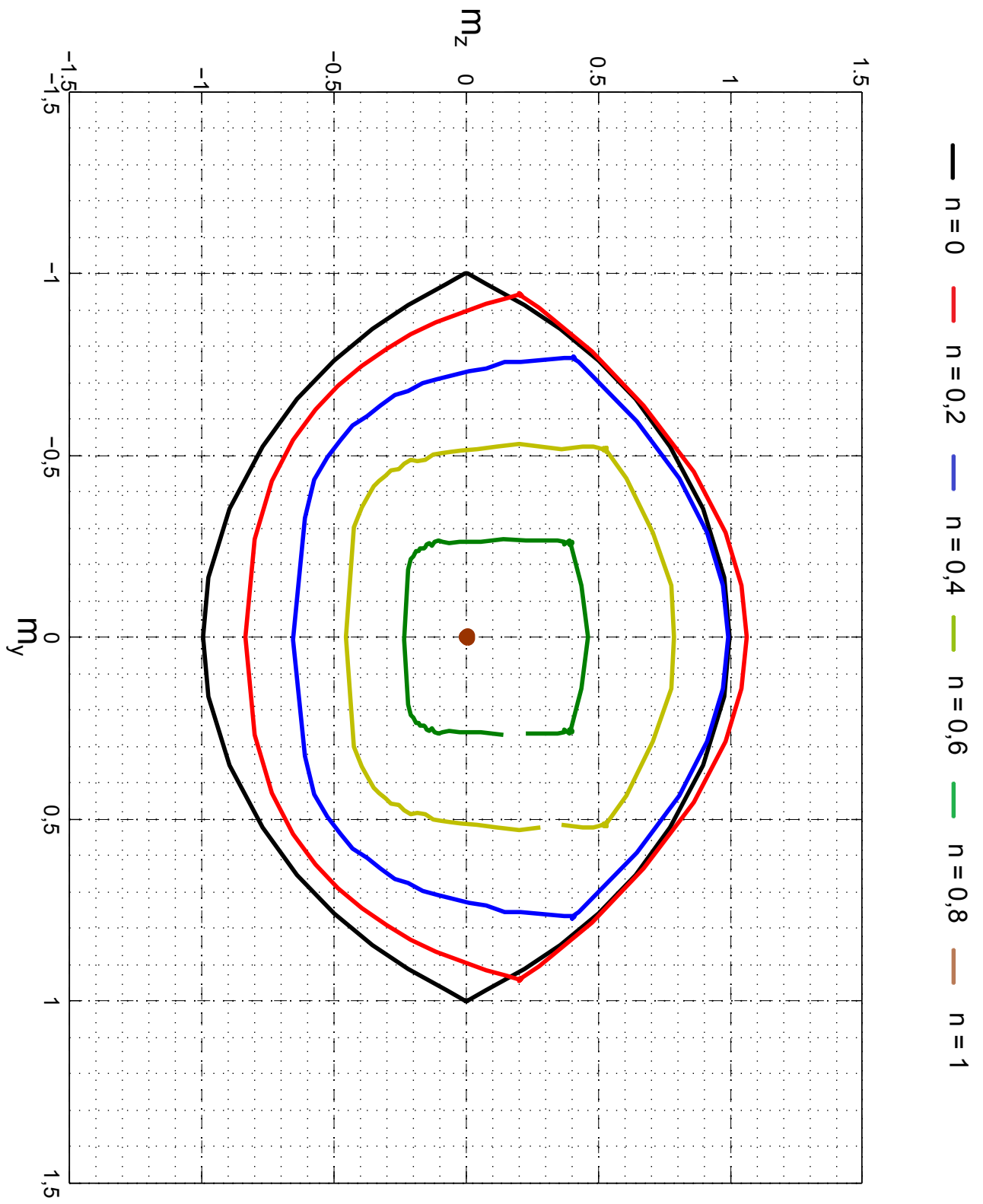


Figura A.6: $\alpha = 2,5$ e $\beta = 19,8$

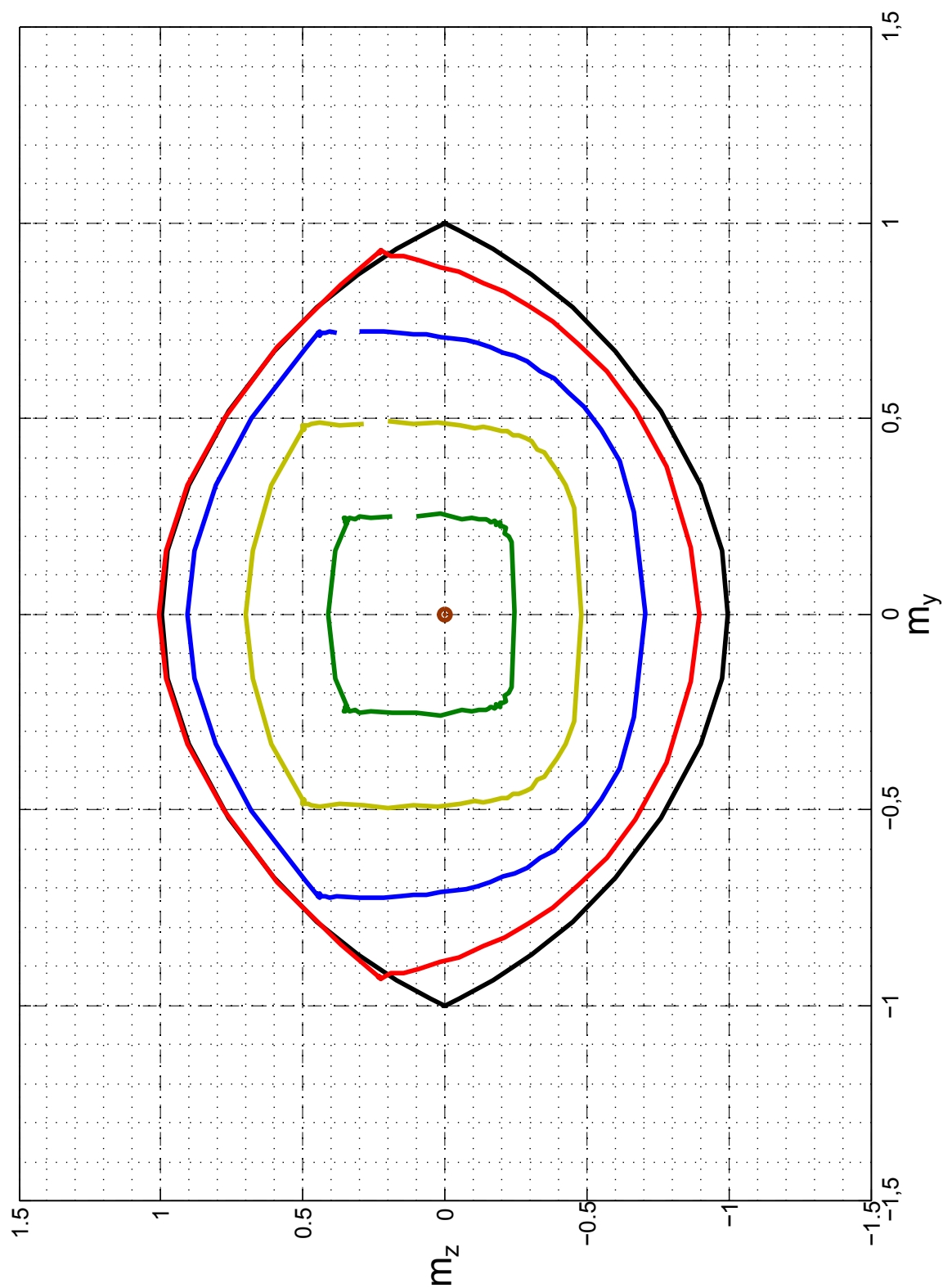


Figura A.7: $\alpha = 2, 5$ e $\beta = 32, 4$

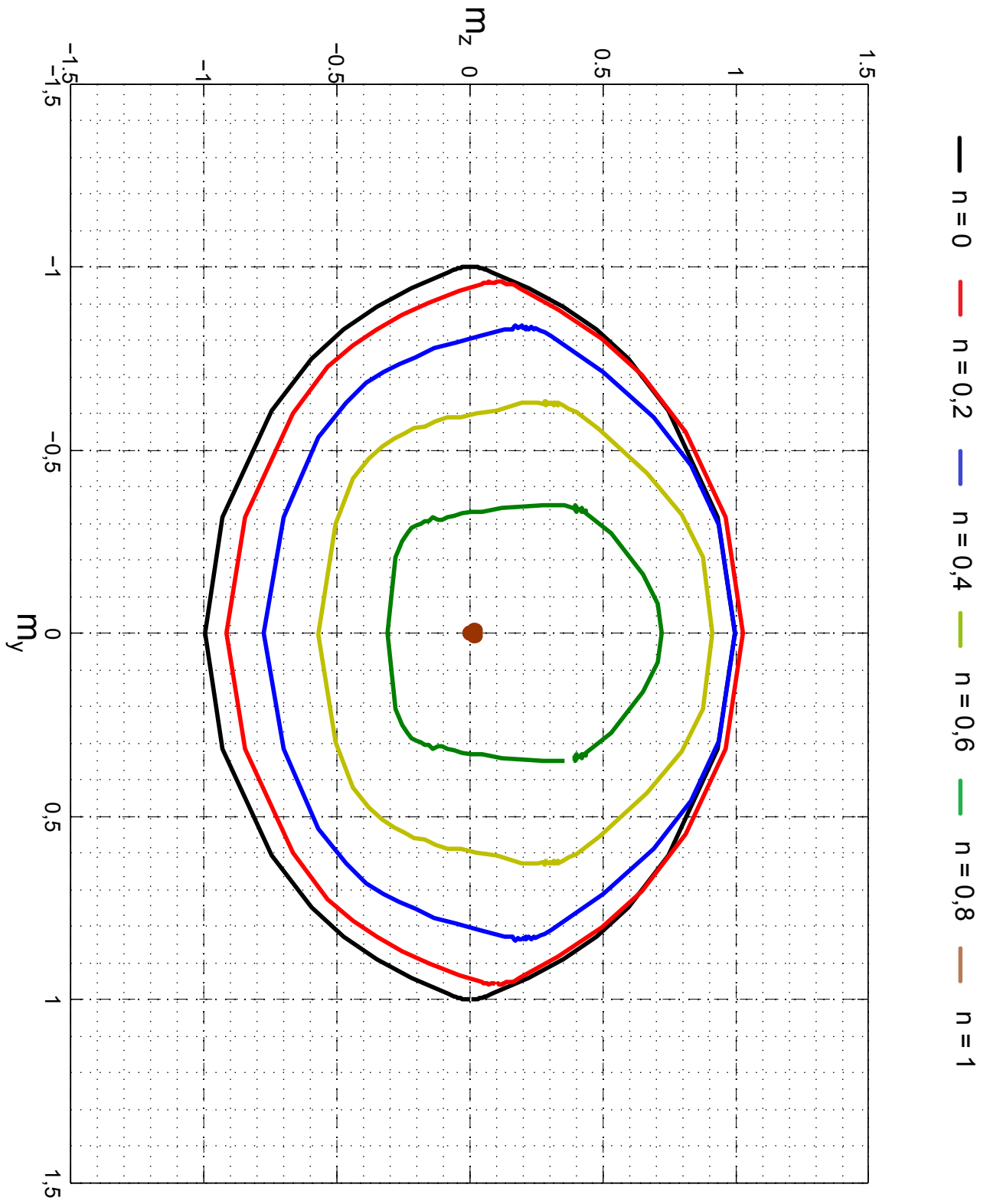


Figura A.8: $\alpha = 2,5$ e $\beta = 7,2$

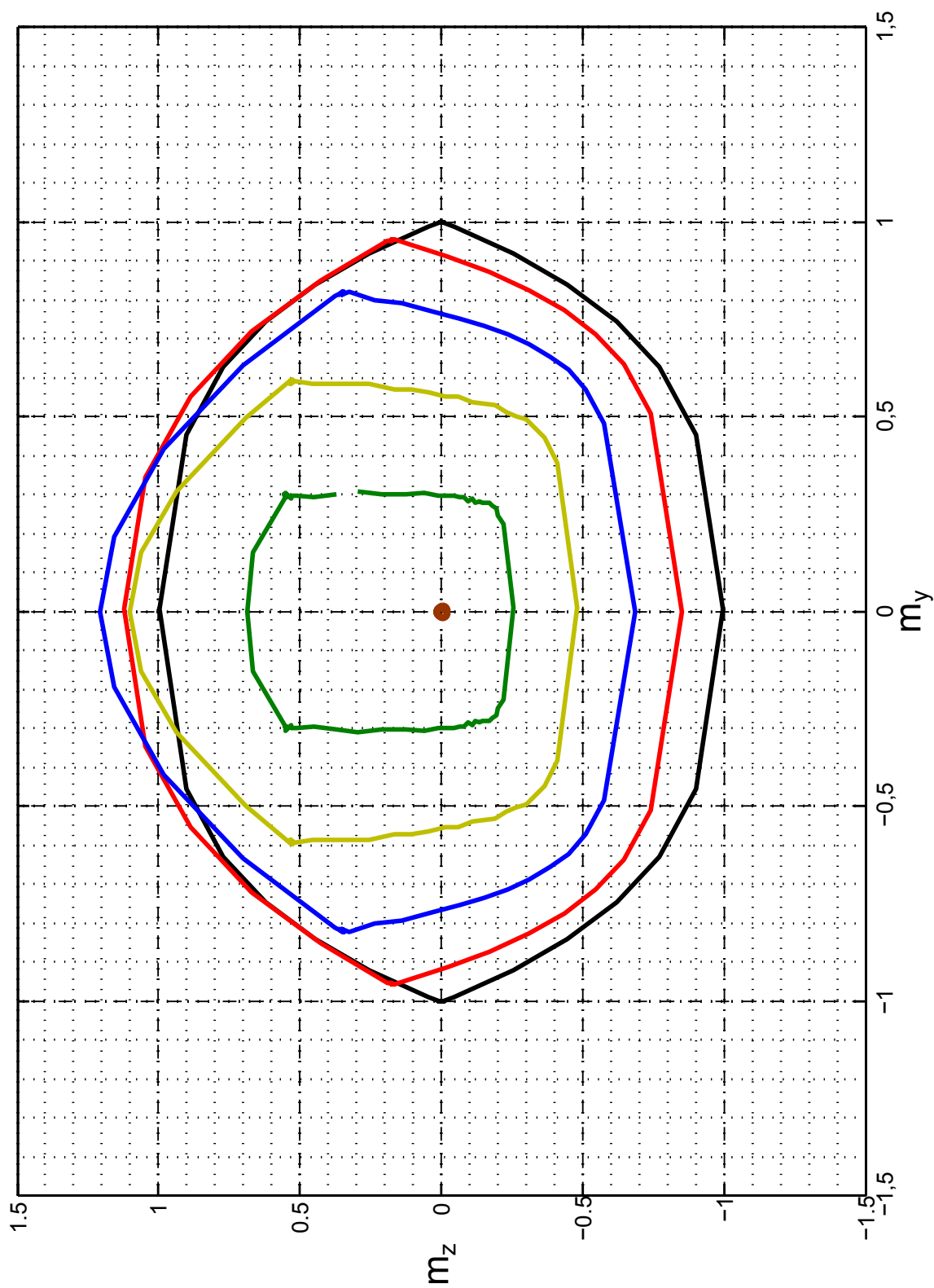


Figura A.9: $\alpha = 3,93$ e $\beta = 19,8$

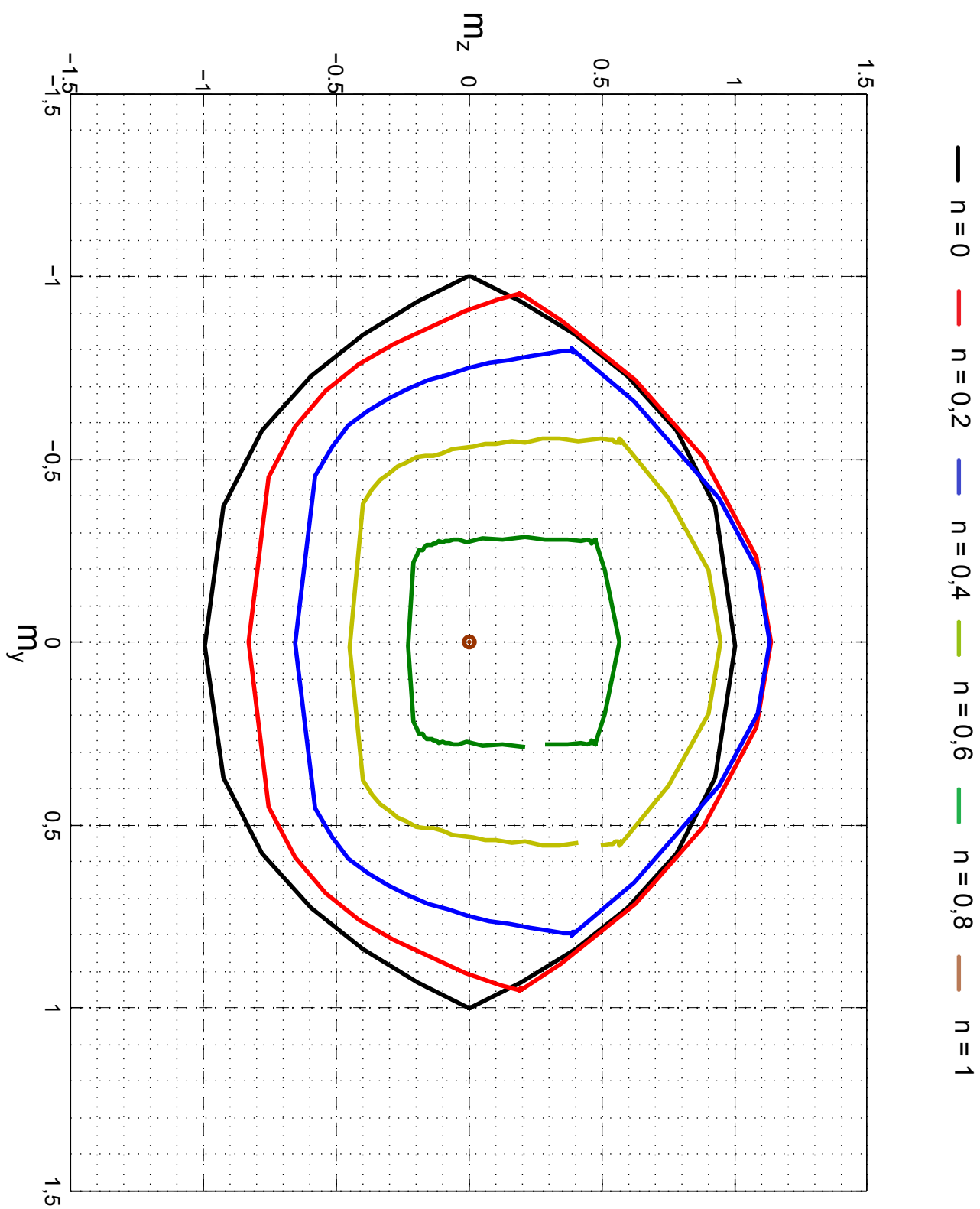


Figura A.10: $\alpha = 3,93$ e $\beta = 32,4$